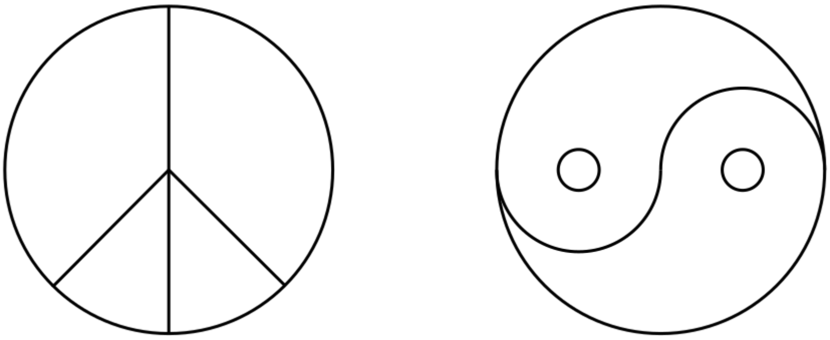
Serie 4

Aufgabe 1

Zeigen sie, dass die Symmetriegruppen der folgenden zwei Figuren im $\mathbb{R}^2$ isomorph sind, aber nicht identisch:



Aufgabe 2

Verwende den Satz über affine Punktmengen um zu argumentieren, dass die Symmetriegruppe des regelmässigen 8-Ecks in $\mathbb{R}^2$ nicht mehr als 16 Elemente hat.

Aufgabe 3

(i) Man konstruiere die Multiplikationstafel der Einheitsquaternionen[1] $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, die $-1 = i^2 = j^2 = k^2 = ijk$ erfüllen.

(ii) Man konstruiere die Multiplikationstafel der Diedergruppe $D_4 = \mathrm{Sym}(P_4)$.

(iii) Kann man die eine in die andere durch schlaue Symbolensubstitutionen umwandeln? (Existiert ein Isomorphismus?)

(iv) Gibt es unendlich viele verschiedene Isomorphieklassen von Gruppen mit 8 Elementen?

Aufgabe 4 — Wahr oder Falsch

Sei G eine Gruppe und $g, h \in G$. Stimmen die folgenden Aussagen immer?

(i) Aus $g^2 = h^2$ folgt $g = h$.

(ii) Es sei $n > 0$. Aus $h^n = 1$ folgt $(ghg^{-1})^n = 1$.

(iii) Für jedes $n > 1$ besitzt die Gleichung $h^n = g$ eine Lösung h in G.

(iv) Die Gleichung $gxg = h$ besitzt genau eine Lösung $x \in G$.

(v) Besteht G aus Isometrien von $\mathbb{R}^3$, die einen gemeinsamen Fixpunkt besitzt, so ist G endlich.

[1] Eine kurze Definition der Quaternionen findet man im Skript, Chapter 7, Section 28.

Aufgabe 5

(i) Finde eine Menge und eine Operation, die alle Eigenschaften einer Gruppe erfüllt, ausser der Existenz einer Inverse.

(ii) Ist die Menge endlich?

(iii) Erfüllt das Beispiel die Kürzungsregel?