Serie 5

Aufgabe 1

(a) Finde zyklische Gruppen mit genau 1, 2 oder 4 unterschiedlichen Generatoren.

(b) Zeige, dass keine zyklische Gruppe genau 3 Generatoren hat.

Aufgabe 2

Sei D_n die Diedergruppe der Ordnung $2n$, $n \geq 2$.

(a) Zeigen Sie, dass D_n von zwei Spiegelungen erzeugt werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass D_n von einer Spiegelung und einer Drehung erzeugt werden kann.

(c) Warum kann D_n nicht von einem einzelnen Element erzeugt werden?

Aufgabe 3

Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Menge der Automorphismen

$$\mathrm{Aut}(G) = \{\varphi : G \to G : \varphi \text{ ist ein Gruppenisomorphismus}\}$$

mit der Hintereinanderschaltung $\circ$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 4

Mache folgende Berechnungen mit Permutationen

(1) $(54)(13)(2) = (13)(45)$

(2) $(13)(34)(135) = (14)(41)(35)(14)$

(3) $[(132)(45)]^6 = \mathrm{id}$

(4) $(123)(41253)(12)(123)^{-1} = (42351)(23)$. Siehst du eine Regelmässigkeit?

Aufgabe 5

(1) Zeige, dass die symmetrische Gruppe S_4 von den Transpositionen $(12), (23), (34)$ erzeugt wird.

(2) Finde eine normale Untergruppe H von S_4 der Ordnung 4. “Normal” heisst, dass $gHg^{-1} = H$ für alle $g \in S_4$. *Tip: Verwende (1) und Aufgabe 4(4).*