Ferienserie

Aufgabe 1

Zeige, dass eine Gruppe mit Primzahlordnung zyklisch ist.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Untergruppen der Diedergruppe D_n.

Aufgabe 3

Finde einen surjektiven Homomorphism von der Einheitsquaternionen-Gruppe $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ zur Kleinschen Vierergruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Aufgabe 4

Zeige, dass jeder Automorphismus der additiven Gruppe $\mathbb{Z}_n$ durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl gegeben ist.

Aufgabe 5

Wieviele Automorphismen hat die Gruppe $\mathbb{Z}_4$? $\mathbb{Z}_5$? $\mathbb{Z}_{28}$?

Aufgabe 6

Finde eine Gruppe G und einen Teiler $k > 0$ von $\#G$, sodass G keine Untergruppe der Ordnung k hat.

Aufgabe 7

Sei $A \leq B \leq C$. Finde ein Beispiel mit A normal in B und B normal in C, aber A nicht normal in C. *Hint: Figur 36.1. im Skript.*

Aufgabe 8

Sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

(a) Ist das Bild einer normalen Untergruppe zwingend normal? Was kann schief gehen?

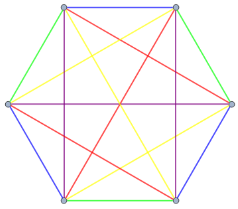
(a) Was passiert, wenn f surjektiv ist?

Aufgabe 9

Wieso kann man mit regelmässigen 6-Ecken keinen platonischen Körper bilden?

Aufgabe 10

Was ist die (farbtreue) Symmetriegruppe der folgenden markierten Figur?



Aufgabe 11

Sei $R_\theta(X)$ die Rotation um der x-Achse X um den Winkel θ, $0 < \theta < 2\pi$. Seien $p, q \in X$ Punkte mit Abstand 1. Seien s_p, s_q die Punktspiegelungen an p, q.

(a) Zeige, dass
$$s_p \circ R_\theta(A) \circ s_q$$
eine Schraubbewegung S um die Achse X ist.

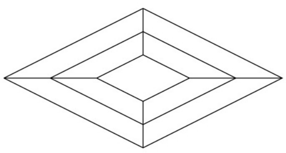
(b) Finde den Abstand t, um den S die Achse A verschiebt.

Aufgabe 12

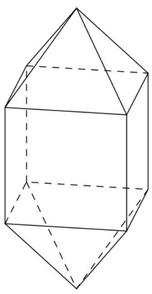
Geben Sie ohne Begründung die Ordnungen der Symmetriegruppen der folgenden Figuren an. Die gestrichelten Kanten sind nur zur besseren Lesbarkeit gestrichelt.

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \text{ und } 0 \leq y \leq 1\}$

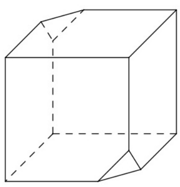
(b) In $\mathbb{R}^2$:



(c) In $\mathbb{R}^3$, alle Kanten haben die gleiche Länge:



(d) Die Figur in $\mathbb{R}^3$ entsteht aus dem Würfel durch Abschneiden entlang zweier kongruenter, gleichseitiger Dreiecke, die orthogonal zur Raumdiagonale des Würfels stehen:



Aufgabe 13

Markiere einen Würfel oder Oktaeder (oder Tetraeder) um die Symmetriegruppen zu einigen der Untergruppen in Figur 36.1 (Skript) zu reduzieren. (Wähle einige, die dich am meisten interessieren.)

Aufgabe 14

Wieso erhalten wir nicht

$$\mathrm{Sym}(T) = \mathrm{Sym}_+(T) \times \{\pm I\}$$

mit dem gleichen Beweis wie bei

$$\mathrm{Sym}(W) = \mathrm{Sym}_+(W) \times \{\pm I\} \ \ ?$$

For fun

Aufgabe 15(∗)

Sei G eine endliche Gruppe mit $\#G > 2$. Zeige, dass $\mathrm{Aut}(G)$ nicht trivial ist.

Aufgabe 16(∗)

Finde einen äusseren Automorphismus von $\mathrm{Sym}(W)$.