Prof. Dr. Tom Ilmanen 22. Dezember 2017

Geometrie
Prüfung
D-MATH

Name: Max, Mustermann
Legi-Nr.: 17-000-000
Studiengang: Mathematik BSc

1

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Elektronik (z.B. Telefone) ist auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 100 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Vier selbst von Hand geschriebene A4-Seiten (zwei A4-Blätter beidseitig beschrieben). Wörterbücher.
- Keine Fotokopien. Keine Elektronik.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und geben Sie sortiert ab. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und Ihrer Legi-Nummer. Lassen Sie die linke obere Ecke zum Heften frei.
- Schreiben Sie in blau oder schwarz.
- Keine Bleistifte. Kein Tipp-Ex.
- Schreiben Sie ordentlich. Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Maximalpunktzahl: 24 Punkte.

Alle Antworten müssen begründet werden, mit Ausnahme von Aufgabe 1 und 2.

Wenn Sie Aussagen aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, worauf Sie sich beziehen.

Tabelle nicht ausfüllen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1	[4]	
2	[4]	
3	[4]	
4	[6]	
5	[6]	
Total	[24]	
Vollständigkeit		
Note		

Aufgabe 1. **[4 Punkte]**

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen *ohne Begründung* an, ob sie wahr oder falsch ist:

(a) Für jede endliche Gruppe G und Untergruppen $H, H' < G$ gilt: Falls H und H' isomorph sind, so sind sie in G konjugiert.

(b) Die Identitätsabbildung $\mathrm{id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kann als Komposition von 17 Ebenenspiegelungen geschrieben werden.

(c) Sei $n \geq 3$. Jede Untergruppe der Diedergruppe D_n ist normal.

(d) Die Symmetriegruppe eines regulären 22-Ecks wird von zwei Elementen erzeugt.

Jede richtige Antwort gibt 1 *Punkt, jede unbeantwortete Frage gibt* 0 *Punkte, jede falsche Antwort gibt* -1 *Punkt. Die Minimalpunktzahl für diese Aufgabe beträgt* 0 *Punkte.*

Aufgabe 2. **[4 Punkte]**

Zeichnen Sie für jedes $n \in \{2, 3, 4, \infty\}$ eine Figur $F \subseteq \mathbb{R}^2$, sodass $|\mathrm{Sym}(F)| = n$.

Aufgabe 3. **[4 Punkte]**

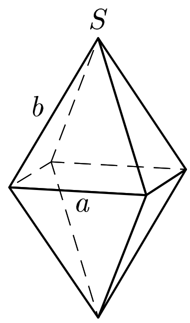
Zeigen oder widerlegen Sie jede der folgenden Aussagen.

(a) Sei G eine Gruppe, in der jedes Element Ordnung höchstens zwei hat. Dann ist G kommutativ.

(b) Sei G eine Gruppe, in der jedes Element Ordnung höchstens drei hat. Dann ist G kommutativ.

Aufgabe 4. **[6 Punkte]**

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ die beistehende Doppelpyramide mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge a und seitlicher Länge $b > a$.



(a) Bestimmen Sie den Orbit sowie den Stabilisator des Punktes S unter der Operation von $\mathrm{Sym}(D)$.

(b) Geben Sie alle Elemente von $\mathrm{Sym}(D)$ an.

Aufgabe 5. **[6 Punkte]**

Es bezeichne O den Oktaeder und $\mathrm{Sym}(O)$ seine Symmetriegruppe.

(a) Konstruieren Sie einen nicht-trivialen Homomorphismus von $\mathrm{Sym}(O)$ nach S_4.

(b) Bestimmen Sie den Kern dieses Homomorphismus.

(c) Ist dieser Homomorphismus surjektiv?