Prof. Dr. Tom Ilmanen 21. Dezember 2018

Geometrie
Prüfung
D-MATH

Name: ______________________
Legi-Nr.: ______________________
Studiengang: ______________________

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Elektronik (z.B. Telefone) ist auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 100 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Vier selbst von Hand geschriebene A4-Seiten (zwei A4-Blätter beidseitig beschrieben). Wörterbücher. Zwei $3D$-Figuren.
- Keine Fotokopien. Keine Elektronik.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und geben Sie sortiert ab. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und Ihrer Legi-Nummer. Lassen Sie die linke obere Ecke zum Heften frei.
- Schreiben Sie in blau oder schwarz.
- Keine Bleistifte. Kein Tipp-Ex.
- Schreiben Sie ordentlich. Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Antworten auf Englisch sind erlaubt.
- Maximalpunktzahl: 24 Punkte.

Alle Antworten müssen begründet werden, mit Ausnahme von Aufgabe 1.

Wenn Sie Aussagen aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, worauf Sie sich beziehen.

Tabelle nicht ausfüllen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1	[4]	
2	[4]	
3	[6]	
4	[4]	
5	[6]	
Total	[24]	
Vollständigkeit		
Note		

Prüfung

Aufgabe 1 [4 Punkte]

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen *ohne Begründung* an, ob Sie wahr oder falsch ist:

(1) Die alternierende Gruppe A_4 besitzt keine normalen Untergruppen ausser $\{1\}$ und A_4 selber.

(2) Sei G eine Gruppe und seien $H_1, H_2 \trianglelefteq G$ normale Untergruppen von G. Dann ist die von deren Vereinigung erzeugte Untergruppe $\langle H_1 \cup H_2 \rangle$ wieder normal in G.

(3) Sind $F_1 \subseteq F_2$ Figuren in $\mathbb{R}^2$, so ist $\mathrm{Sym}(F_1) \subseteq \mathrm{Sym}(F_2)$.

(4) Das reguläre Dodekaeders hat 31 Drehachsen.

Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede unbeantwortete Frage gibt 0 Punkte, jede falsche Antwort gibt -1 Punkt. Die Minimalpunktzahl für diese Aufgabe beträgt 0 Punkte.

Aufgabe 2 [4 Punkte]

Beweisen oder widerlegen Sie:

(1) Sei $n \geq 2$ und G eine Gruppe mit genau einem Element g der Ordnung n. Dann ist $n = 2$ und g liegt im Zentrum von G.

(2) Sei G eine Gruppe, $x, y \in G$. Dann haben xy und yx immer die gleiche Ordnung.

Aufgabe 3 [6 Punkte]

Betrachten Sie die Symmetrische Gruppe $S_3 = \{(), (123), (132), (12), (13), (23)\}$.

(1) Finden Sie einen Isomorphismus zwischen $\mathrm{Aut}(S_3)$ und einer aus der Vorlesung bekannten Gruppe.

(2) Beweisen Sie, dass S_3 keine äusseren Automorphismen besitzt.

Aufgabe 4 [4 Punkte]

Man betrachtet die Symmetriegruppen der folgenden Friese in $\mathbb{R}^2$:

(a) $\cdots$ RRRRRRRRR $\cdots$

(b) $\cdots$ RꓤRꓤRꓤRꓤR $\cdots$

(c) $\cdots$ DDDDDDDDD $\cdots$

Die Aufgabe:

(1) Bestimmen Sie die drei Symmetriegruppen. Welche sind isomorph?

(2) Welche sind konjugiert (in $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$)?

Begründen Sie ihre Antworten.

Aufgabe 5 [6 Punkte]

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^3$ die untenstehende Figur, die aus zwei zusammengeklebten regulären Tetraedern besteht. Die Schnittmenge der beiden Tetraeder ist ein reguläres Sechseck in der horizontalen Ebene, die die beiden Tetraeder trennt.

Fig. 1. Zwei verschiedene Perspektiven

(1) Bestimmen Sie den Orbit sowie den Stabilisator des Punktes S unter der Operation von $\mathrm{Sym}(X)$.

(2) Geben Sie die Ordnung von $\mathrm{Sym}(X)$ an.

(3) Geben Sie alle Elemente von $\mathrm{Sym}(X)$ an.