Lösung Prüfung

Aufgabe 1 **[4 Punkte]**

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen *ohne Begründung* an, ob sie wahr oder falsch ist:

(1) $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ ist isomorph zu $(\mathbb{R}, +)$.

(2) Seien $E, F \subseteq \mathbb{R}^2$ Figuren. Falls $E \subseteq F$, dann gilt $\mathrm{Sym}(F) \leq \mathrm{Sym}(E)$.

(3) Sei $F \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Figur mit Symmetriegruppe G. Die Symmetriegruppe von $F \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist stets isomorph zu $G \times \mathbb{Z}_2$.

(4) Das Schläfli Symbol $(3, 4)$ beschreibt einen Tetraeder.

Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede unbeantwortete Frage gibt 0 Punkte, jede falsche Antwort gibt -1 Punkt. Die Minimalpunktzahl für diese Aufgabe beträgt 0 Punkte.

Lösung:

(1) JA

(2) NEIN

(3) NEIN

(4) NEIN

Aufgabe 2 **[4 Punkte]**

Für jede der folgenden vier Figuren in der Ebene, bestimmen Sie die Anzahl Symmetrien und zählen Sie alle Elemente der Symmetriegruppen auf, *ohne Beweis*.

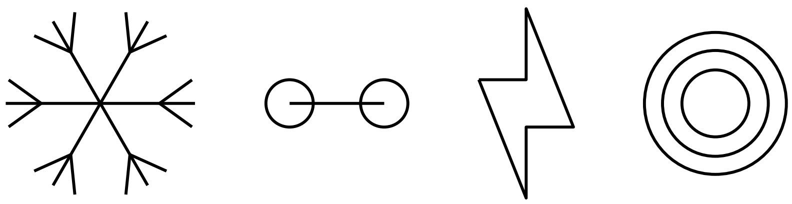

Abbildung 1: Schneeflocke, Hantel, Blitz, konzentrische Kreise.

Lösung:
Schneeflocke: Die Symmetriegruppe ist die Diedergruppe D_6, der Ordnung 12. Sei r die Rotation um 60° und s die Spiegelung an der horizontalen Achse. Dann ist

$$\mathrm{Sym}(\text{Schneeflocke}) = \left\{ r^k, r^k s r^{-k} \colon k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \right\},$$

nämlich die Identität, fünf Rotationen und 6 Spiegelungen.

Hantel: Die Symmetriegruppe hat 4 Elemente, nämlich die Identität, die Spiegelung an der horizontalen Achse, die Spiegelung an der vertikalen Achse und die Rotation um 180°.

Blitz: Die zwei Elemente sind die Identität und die Rotation um 180°.

Kreise: Die Ordnung ist unendlich (oder undefiniert). Die Symmetriegruppe besteht aus allen Drehungen um den Mittelpunkt, sowie allen Spiegelungen an Spiegelachsen durch den Mittelpunkt.

Aufgabe 3 [4 Punkte]

Sei T das Tetraeder.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}(T)$ von zwei Elementen erzeugt werden kann. Geben sie zwei solche Elemente an.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}(T)$ nicht von einem Element erzeugt wird.

Lösung:

(a) Wir können $\mathrm{Sym}(T)$ mit S_4 identifizieren. Wir behaupten, dass $\mathrm{Sym}(T)$ von (12) und (234) erzeugt wird.

Zuerst bekommen wir $(14) = (234)^{-1}(12)(234)$ und $(13) = (234)^{-1}(234)^{-1}(12)(234)(234)$.

Dann bekommen wir $(134) = (12)(234)(12)$, $(142) = (13)(234)(13)$ und $(123) = (14)(234)(14)$.

Dann $(23) = (142)^{-1}(13)(142)$, $(24) = (134)^{-1}(12)(134)$, $(34) = (123)^{-1}(14)(123)$.

So bekommen wir alle Permutationen, die nur zwei Zahlen vertauschen. Wir wissen, dass S_4 davon erzeugt wird.

(b) In einer Gruppe, die von einem Element erzeugt wird, sind alle Elemente g von der Form a^{k_g} für ein Gruppenelement a und ein $k_g \in \mathbb{Z}$. Wir bemerken, dass eine solche Gruppe abelsch ist: $gh = a^{k_g}a^{k_h} = a^{k_g+k_h} = a^{k_h}a^{k_g} = hg$. Wir wissen aber, dass $\mathrm{Sym}(T)$ nicht abelsch ist, weil zum Beispiel $(12)(23) = (123) \neq (132) = (23)(12)$.

Somit kann $\mathrm{Sym}(T)$ nicht von einem Element erzeugt sein.

Aufgabe 4 [4 Punkte]

(a) Sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und e_H das neutrale Element von H. Zeigen Sie, dass der Kern

$$\ker(\varphi) := \{g \in G\colon \varphi(g) = e_H\}$$

eine normale Untergruppe von G ist.

(b) Was ist der Kern des Homomorphismus

$$\begin{aligned}\varphi\colon\ \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}_n\\ a &\mapsto \overline{a},\end{aligned}$$

wobei $\overline{a} = a \bmod n$?

Lösung:

(a) Zuerst zeigen wir, dass $\ker(\varphi)$ eine Untergruppe ist. $\ker(\varphi)$ ist nicht leer, da $\varphi(e_G) = e_H$, also $e_G \in \ker(\varphi)$. Sei $a, b \in \ker(\varphi)$. Es gilt $\varphi(a) = e_H = \varphi(b)$. Dann ist $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = e_H e_H = e_H$, also auch $ab \in \ker(\varphi)$. Ebenso $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} = (e^H)^{-1} = e_H$. Also ist auch $a^{-1} \in \ker(\varphi)$. Somit ist der Kern eine Untergruppe von G.

Weiter müssen wir zeigen, dass für alle $g \in G, h \in \ker(\varphi)$ gilt $ghg^{-1} \in \ker(\varphi)$. In der Tat:

$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)e_H\varphi(g)^{-1} = e_H.$$

(b) Das neutrale Element in $\mathbb{Z}_n$ ist $\overline{0}$. Sei $a \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi(a) = \overline{a} = \overline{0}$, also $a \equiv 0 \bmod n$. Somit muss a ein Vielfaches von n sein. Andererseits gilt für jedes Vielfache a von n auch $\varphi(a) = \overline{0}$. Somit gilt

$$\ker(\varphi) = n\,\mathbb{Z} = \{n \cdot k\colon\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Aufgabe 5 [6 Punkte]

Sei C der markierte Würfel in Abbildung 2. Die versteckten Seiten sind so markiert, dass die Figur punktsymmetrisch am Mittelpunkt des Würfels ist. *Begründen Sie Ihre Antwort.*

(a) Bestimmen Sie die Ordnung von $\mathrm{Sym}(C)$.

(b) Bestimmen Sie den Isomorphietyp von $\mathrm{Sym}(C)$ (mit Hilfe von bekannten Gruppen wie $\mathbb{Z}_n, D_n, S_n$).

(c) Finden Sie zwei Untergruppen von $\mathrm{Sym}(C)$ der Ordnung 4, die konjugiert sind in $\mathrm{Sym}(C)$, aber nicht gleich.

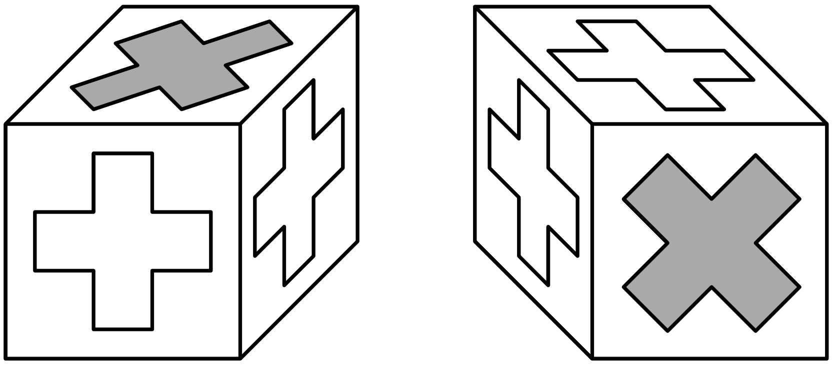

Abbildung 2: Zwei Ansichten von C. Der markierte Würfel C hat vier $+$ Symbole und zwei $\times$ Symbole (letzteres in grau). Per Definition ist die Figur punktsymmetrisch am Mittelpunkt des Würfels.

Lösung:

(a) Wir fragen uns wie $\mathrm{Sym}(C)$ auf das graue $\times$ Symbol wirkt. Die Untergruppe, die das obere graue $\times$ Symbol wieder auf sich selber abbildet, entspricht der Diedergruppe D_4 mit 8 Elementen. Zusätzlich kann das graue $\times$ aber auch noch nach unten gespiegelt werden und wenn dort gibt es auch wieder die 8 Elemente. Das sind alle Möglichkeiten für das graue $\times$, somit ist $|\,\mathrm{Sym}(C)| = 16$.

(b) Die Symmetriegruppe ist ein direktes Produkt von D_4 und $\mathbb{Z}_2$. Sei $H < \mathrm{Sym}(C)$ die Untergruppe, die das obere graue $\times$ fixiert. Wir identifizieren H mit D_4. Sei σ die Spiegelung am Würfelmittelpunkt. Wir behaupten, dass der Isomorphismus durch

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathrm{Sym}(C) &\to D_4 \times \mathbb{Z}_2 \\ g &\mapsto \begin{cases} (g, \overline{0}) & \text{if} \quad g \in H \\ (g\sigma, \overline{1}) & \text{if} \quad g \in H\sigma \end{cases} \end{aligned}$$

gegeben ist. f ist bijektiv. Wir müssen noch argumentieren, warum f ein Homomorphismus ist.

Fall 1: $g, h \in H$. Dann $hg \in H$ und $f(gh) = (gh, \overline{0}) = (g, \overline{0})(h, \overline{0}) = f(g)f(h)$.

Fall 2: $g \in H, h =\in H\sigma$. Dann $h = k\sigma$ für ein $k \in H$. Wir haben $gh = gk\sigma \in H\sigma$. Also

$$\begin{aligned} f(gh) &= (gk\sigma\sigma, \overline{1}) = (gk, \overline{1}) \\ &= (g, \overline{0})(k, \overline{1}) = f(g)f(k\sigma) = f(g)f(h). \end{aligned}$$

Fall 3: $g \in H\sigma, h \in H$, wie Fall 2.

Fall 4: $g, h \in H\sigma$. Sei $g = a\sigma, h = b\sigma$ für $a, b \in H$. Dann können wir verwenden, dass σ mit allen Elementen von H kommutiert. Aus Fall 1 folgt dann

$$f(gh) = f(a\sigma b\sigma) = f(ab\sigma\sigma) = f(ab) = f(a)f(b).$$

(c) Für jedes + Symbol P betrachten wir die Untergruppe $K_P < \mathrm{Sym}(C)$, die die Menge P erhält. Wir haben $K_P \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ bestehend aus zwei Ebenenspiegelungen und einer Rotation um 180°, weil die benachbarten $\times$ und + wieder auf sich selber abgebildet werden müssen. Für P, P' gegenüberliegende + Symbole gilt $K_P = K_{P'}$, aber für P, P'' nicht gegenüberliegend sind die Gruppen $K_P, K_{P''}$ unterschiedlich. Sie sind jedoch konjugiert durch eine Rotation r um 90°, mit $r(P) = P''$ (wobei die Rotationsachse durch die $\times$ geht).