Prof. Dr. Tom Ilmanen 26. Februar 2018

Geometrie
Repetitionsprüfung
D-MATH

Name: Max, Mustermann
Legi-Nr.: 17-000-000
Studiengang: Mathematik BSc

11

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Elektronik (z.B. Telefone) ist auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 100 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Vier selbst von Hand geschriebene A4-Seiten (zwei A4-Blätter beidseitig beschrieben). Wörterbücher.
- Keine Fotokopien. Keine Elektronik.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und geben Sie sortiert ab. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und Ihrer Legi-Nummer. Lassen Sie die linke obere Ecke zum Heften frei.
- Schreiben Sie in blau oder schwarz.
- Keine Bleistifte. Kein Tipp-Ex.
- Schreiben Sie ordentlich. Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Maximalpunktzahl: 24 Punkte.

Alle Antworten müssen begründet werden, mit Ausnahme von Aufgabe 1 und 2.

Wenn Sie Aussagen aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, worauf Sie sich beziehen.

Tabelle nicht ausfüllen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1	[4]	
2	[4]	
3	[4]	
4	[4]	
5	[4]	
6	[4]	
Total	[24]	
Vollständigkeit		
Note		

Aufgabe 1. **[4 Punkte]**

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen *ohne Begründung* an, ob sie wahr oder falsch ist:

(a) Es gibt eine spiegelsymmetrische Figur $X \subseteq \mathbb{R}^3$ so, dass $\mathrm{Sym}(X)$ von der Ordnung $4n+3$ ist für ein $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Der Stabilisator eines Seitenmittelpunktes des Tetraeders in $\mathrm{Sym}(T)$ ist zu genau 4 verschiedenen Untergruppen von $\mathrm{Sym}(T)$ konjugiert.

(c) Die Symmetriegruppe eines nicht-quadratischen Rechtecks ist als Gruppe isomorph zu $G = \{\pm 1, \pm i\}$, wobei die Verknüpfung in G durch die Multiplikation von komplexen Zahlen gegeben ist.

(d) Für jede Gruppe G und Untergruppen A, B ist $AB := \{ab | a \in A, b \in B\}$ eine Untergruppe von G.

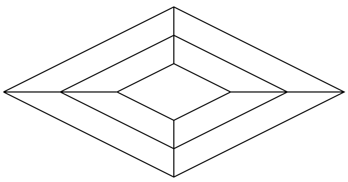
Jede richtige Antwort gibt 1 *Punkt, jede unbeantwortete Frage gibt* 0 *Punkte, jede falsche Antwort gibt* -1 *Punkt. Die Minimalpunktzahl für diese Aufgabe beträgt* 0 *Punkte.*

Aufgabe 2. **[4 Punkte]**

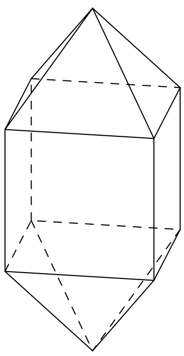
Geben Sie ohne Begründung die Ordnungen der Symmetriegruppen der folgenden Figuren an. Die gestrichelten Kanten sind nur zur besseren Lesbarkeit gestrichelt.

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \text{ und } 0 \leq y \leq 1\}$

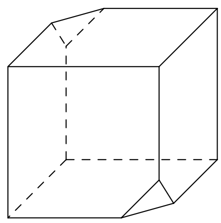
(b) In $\mathbb{R}^2$:



(c) In $\mathbb{R}^3$, alle Kanten haben die gleiche Länge:



(d) Die Figur in $\mathbb{R}^3$ entsteht aus dem Würfel durch Abschneiden entlang zweier kongruenter, gleichseitiger Dreiecke, die orthogonal zur Raumdiagonale des Würfels stehen:



Aufgabe 3. **[4 Punkte]**

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei G eine Gruppe und sei $H < G$ eine Untergruppe vom Index 2. Dann ist H normal in G.

(b) Sei G eine Gruppe und sei $H < G$ eine Untergruppe vom Index 3. Dann ist H normal in G.

Aufgabe 4. **[4 Punkte]**

Für $n \geq 1$ sei D_n die Gruppe aller Isometrien von $\mathbb{R}^2$, die das reguläre n-Eck P auf sich selbst abbilden. Ein 1-Eck ist ein Punkt, ein 2-Eck ist ein Intervall. Nach Nummerierung der Ecken von P induziert die Operation von D_n auf den Ecken von P einen Homomorphismus $\varphi : D_n \to S_n$.

(a) Für welche $n \geq 1$ ist φ injektiv?

(b) Für welche $n \geq 1$ ist φ surjektiv?

Aufgabe 5. **[4 Punkte]**

Zeigen Sie, dass die Symmetriegruppe des Würfels $\mathrm{Sym}(W)$ nicht von zwei Ebenenspiegelungen erzeugt werden kann.

Aufgabe 6. **[4 Punkte]**

Seien φ, ψ zwei nichttriviale Drehungen um verschiedene Punkte in $\mathbb{R}^2$. Sei $\tau := \varphi\psi\varphi^{-1}\psi^{-1}$. Zeigen Sie, dass τ nicht die Identität ist.