Prüfung

Aufgabe 1

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen *ohne Begründung* an, ob Sie wahr oder falsch ist:

(1) Der Würfel hat 9 Spiegelungsebenen.

(2) Die Isometriegruppe des Ikosaeder besitzt 168 Elemente.

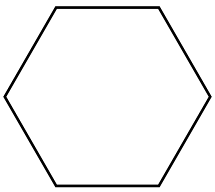
(3) Sei C_{201} die zyklische Gruppe der Ordnung 201. Jedes nicht-triviale Element von C_{201} hat Ordnung 201.

(4) Die Isometriegruppen des Oktaeders und des Tetraeders sind isomorph.

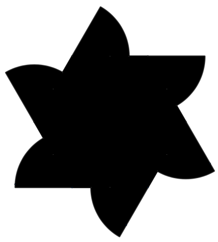
Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede unbeantwortete Frage gibt 0 Punkte, jede falsche Antwort gibt -1 Punkt. Die Minimalpunktzahl für diese Aufgabe beträgt 0 Punkte.

Aufgabe 2

Seien P_6 und Z_6 die folgenden Figuren in $\mathbb{R}^2$. Beide sind am Ursprung zentriert.



P_6



Z_6

Dann sind $D_6 = \mathrm{Sym}(P_6)$ und $C_6 = \mathrm{Sym}(Z_6)$.

(1) Was sind die Ordnungen von D_6 und C_6?

(2) Beweisen Sie, dass C_6 eine normale Untergruppe von D_6 ist.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die *Kleinsche Vierergruppe* $V := \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$.

(1) Wie viele Automorphismen besitzt V?

(2) Listen Sie die Automorphismen von V auf.

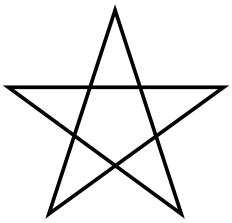
(3) Ist $\mathrm{Aut}(V)$ kommutativ?

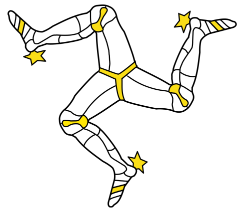
(4) Wieviel innere Automorphismen besitzt V, d.h Automorphismen, die durch Konjugation mit Elementen von V entstehen?

Aufgabe 4

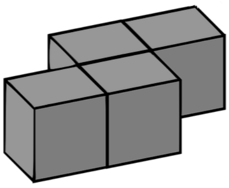
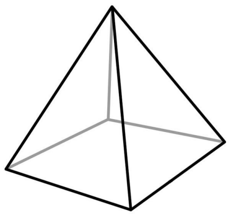
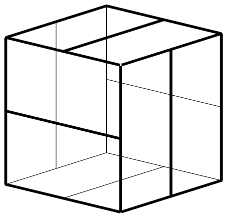
Geben Sie die Symmetriegruppe der folgenden Figuren *ohne Begründung* an. Alle Antworten sind der Form G oder $G \times \mathbb{Z}_2$, wobei $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ und $G \in \{C_n, D_n, A_n, S_n\}$.

(1) Figuren in $\mathbb{R}^2$:



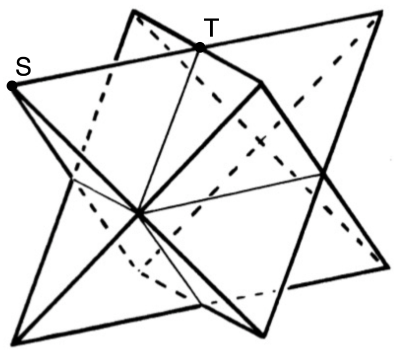


(2) Figuren in $\mathbb{R}^3$:

Aufgabe 5

Es sei $D \subset \mathbb{R}^3$ die untenstehende Figur, die aus zwei ineinandergreifenden regulären Tetraedern besteht. *Hinweis: Sehen Sie einen Würfel?*



(1) Wählen Sie S oder T (nur einen, Ihre Wahl). Bestimmen Sie den Orbit sowie den Stabilisator des Punktes S oder T unter der Operation von $\mathrm{Sym}(D)$.

(2) Geben Sie die Ordnung von $\mathrm{Sym}(D)$ an.

(3) Identifizieren Sie $\mathrm{Sym}(D)$ als G oder $G \times \mathbb{Z}_2$, wobei $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ und $G \in \{C_n, D_n, A_n, S_n\}$.