ETH Zürich | D-MATH | Geometrie
Prof. Dr. Tom Ilmanen | Raphael Appenzeller | 16. September 2020

Lösung: Serie 1

Aufgabe 1

Finde eine Figur mit genau drei Symmetrien.

Lösung:

Es gibt viele solche Objekte. Zum Beispiel die folgenden Figuren als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ oder der Trefoil-Knoten (zweites Bild) als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2

(a) Betrachten Sie das gleichschenklige Dreieck Δ mit den Eckpunkten $A = (-1,-1)$, $B = (1,-1)$ und $C = (0,1)$ in $\mathbb{R}^2$. Es bezeichne

$$s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (-x, y)$$

die Spiegelung an der y-Achse. Ist die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{cases} s(x) & x \in \Delta \\ x & x \notin \Delta \end{cases}$$

eine Symmetrie von Δ gemäß der Definition?

Lösung:

(a) Gemäß der Definition, ist eine Symmetrie von $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ insbesondere eine Isometrie von $\mathbb{R}^2$, das heisst es muss gelten, dass für alle Punkte $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$. Die Abbildung φ ist keine solche

Isometrie von $\mathbb{R}^2$: Betrachte z.B. den Punkt $D := (2, -1) \notin \Delta$. Dann ist

$$d(\varphi(D), \varphi(B)) = |\varphi(D) - \varphi(B)| = |D - A| = \sqrt{3} \neq 1 = |D - B| = d(D, B).$$

Damit ist φ keine Symmetrie von $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$.

Die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; x \mapsto s(x)$$

hingegen ist eine Isometrie von $\mathbb{R}^2$ auf sich selbst und erfüllt $\psi(\Delta) = \Delta$. Somit ist ψ eine Symmetrie von $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b) Betrachten Sie das Dreieck Δ aus (a) als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, d.h. $A = (-1, -1, 0)$, $B = (1, -1, 0)$ und $C = (0, 1, 0)$. Wie viele Symmetrien hat Δ in $\mathbb{R}^3$?

Lösung:

(b) Vier Symmetrien: die Identität, die Spiegelung an der xy-Ebene, die Spiegelung an der yz-Ebene und die Drehung um 180° um die y-Achse.

Aufgabe 3

(a) Bestimmen Sie alle Spiegelungsebenen des Würfels.

(b) Wie viele "Typen" von Spiegelungsebenen hat der Würfel?

($\star$)(c) Die Figur

$$[-1, 1]^4 := \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon -1 \leq x_i \leq 1 \text{ für alle } i \in \{1, 2, 3, 4\}\big\}$$

ist ein vier-dimensionaler Würfel. Wie viele Spiegelungshyperebenen kannst du finden?

Lösung:

(a) Es gibt drei Spiegelungen die achsenparallel sind und sechs Spiegelungen, die vom "Typ" Diagonale-Kante-Diagonale-Kante sind. Wenn man beweisen möchte, dass das alle Spiegelungsebenen sind, könnte man zum Beispiel wie folgt vorgehen.

Wir bemerken die folgende Eigenschaft von Spiegelungen an Spiegelungsebenen: Falls ein Punkt von einer Spiegelung nicht auf sich selber abgebildet wird, dann ist die Spiegelungsebene durch den Punkt und sein Bild schon vollständig bestimmt, es ist nämlich die Menge aller Punkte, die den gleichen Abstand vom Punkt und seinem Bild haben, die "Mittelebene" (wie Mittelsenkrechte).

Wir betrachten einen Punkt P, der in der Mitte einer Fläche des Würfels liegt. Es gibt zwei Möglichkeiten:

Fall 1: Der Punkt P wird von der Spiegelung an einen anderen Ort geschickt.

In diesem Fall ist die Spiegelung durch P und sein Bild vollständig bestimmt. Prinzipiell kommen nur die Mittelpunkte von Flächen des Würfels als Bilder in Frage, da Mittelpunkte auf Mittelpunkte abgebildet werden müssen. Und in der Tat für jeden anderen Mittelpunkt gibt es eine Spiegelung, die P dorthin sendet. Also gibt es in diesem Fall $6 - 1 = 5$ Spiegelungen.

Fall 2: Der Punkt P wird von der Spiegelung auf sich selber abgebildet.

In diesem Fall wird das ganze Quadrat von der Spiegelung auf sich selber abgebildet. Es kommen also nur Spiegelungen in Frage, die auch Spiegelungen des Quadrats sind. Wir wissen, dass ein Quadrat vier Spiegelungen an Achsen hat und für jeden dieser vier Fälle gibt es eine entsprechende Spiegelungsebene durch P. Somit bekommen wir in diesem Fall 4 Spiegelungen.

Insgesamt hat ein Würfel also $5 + 4 = 9$ Spiegelungen.

(b) Zwei: Entweder schneidet die Spiegelungsebene die Oberfläche des Würfels mit "Typ" Diagonale-Kante-Diagonale-Kante oder mit "Typ" achsenparallel.

($\star$)(c) Wir verallgemeinern den Beweis in (a). Auch im $\mathbb{R}^4$ bemerken wir, dass eine (dreidimensionale) Spiegelungshyperebene vollständig durch einen Punkt und sein Bild bestimmt sind, falls sie nicht gleich sind.

So wie ein Würfel durch 6 Quadrate beschränkt ist, wird ein vierdimensionaler Würfel durch 8 dreidimensionale Würfel beschränkt. Einer davon ist zum Beispiel

$$[-1,1]^3 \times \{1\} = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon -1 \le x_1,x_2,x_3 \le 1 \text{ and } x_4 = 1\right\}.$$

Wir betrachten den Mittelpunkt $P = (0,0,0,1)$ dieses 3-Würfels. Wieder gibt es zwei Fälle.

Fall 1: Der Punkt P wird von einer Spiegelung an einen anderen Ort gesendet.

In diesem Fall muss P wieder auf einen 3-Würfel-Mittelpunkt gesendet werden, und davon gibt es $8 - 1 = 7$. Jetzt muss man noch überprüfen, dass es für jeden anderen 3-Würfel-Mittelpunkt tatsächlich eine Spiegelebene gibt. Für $Q = (0,0,0,-1)$ bekommt man die Spiegelung $(x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto (x_1,x_2,x_3,-x_4)$ mit der Spiegelhyperebene

$$\mathbb{R}^3 \times \{0\} = \left\{(x_1,x_2,x_3,0) \in \mathbb{R}^4\right\}.$$

Für den 3-Würfel-Mittelpunkt $Q' = (1, 0, 0, 0)$ bekommt man die Spiegelung $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_4, x_2, x_3, x_1)$ mit der Spiegelhyperebene

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 = x_4\right\}$$

und die anderen 3-Würfelmittelpunkte geben ähnliche Spiegelhyperebenen. Da der 4-Würfel durch 8 3-Würfel beschränkt ist, gibt es also 7 Möglichkeiten für das Bild von P.

Fall 2: Der Punkt P wird von der Spiegelung auf sich selber abgebildet.

In diesem Fall muss der ganze 3-Würfel auf sich selber abgebildet werden. Aus (a) ist bekannt, dass es 9 Spiegelungen des 3-Würfels gibt und jede dieser Spiegelungen kann nach $\mathbb{R}^4$ erweitert werden. Sei $s \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Spiegelung des 3-Würfels, dann ist $s' \colon \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, ((x_1, x_2, x_3), x_4) \mapsto (s(x_1, x_2, x_3), x_4)$ die Spiegelung an der Hyperebene.

Insgesamt bekommen wir also $7 + 9 = 16$ Spiegelungen an Hyperebenen.

Mit dieser Methode kann induktiv bewiesen werden, dass der n-Würfel $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n + 1) = n^2$ Spiegelungshyperebenen hat.

Aufgabe 4

Sei P_n ein reguläres n-gon in der Ebene. Sei R die Rotation um den Mittelpunkt von P_n mit dem Winkel $2\pi/2n$.

(a) Gehört die Punktspiegelung am Mittelpunkt von P_n zu $\mathrm{Sym}(P_n)$?

(b) Haben P_n und $R(P_n)$ die gleichen Symmetrien?

(c) Gegeben sei eine Spiegelung an einer Spiegelachse durch den Mittelpunkt von P_n, die sowohl eine Symmetrie von P_n als auch von $R(P_n)$ ist. Ist sie vom gleichen ”Typ” bezüglich P_n und $R(P_n)$?

Lösung:

(a) Es kommt auf das n darauf an. Wenn n gerade ist, dann wird ein Eckpunkt wieder auf einen Eckpunkt gespiegelt und da das n-gon durch die Eckpunkte bestimmt ist, wird die ganze Figur auf sich selbst abgebildet, also ist die Punktspiegelung eine Symmetrie.

Wenn n hingegen ungerade ist, dann wird ein Eckpunkt nicht mehr auf einen Eckpunkt abgebildet und die Punktspiegelung kann daher keine Symmetrie sein.

(b) Zuerst bemerken wir, dass $R(P_n) \neq P_n$. Die Symmetrien von P_n sind Rotationen um Vielfache des Winkels $2\pi/n$ und Spiegelungen an einer der n Spiegelungsachsen. Das sind genau auch die Symmetrien von $R(P_n)$.

(c) Falls n ungerade ist, gibt es nur einen "Typ" von Spiegelung an Spiegelachse, nämlich geht die Spiegelachse auf der einen Seite durch einen Eckpunkt und auf der anderen Seite durch einen Seitenmittelpunkt.

Falls n jedoch gerade ist, dann gibt es zwei "Typen": Entweder geht die Spiegelachse durch zwei Eckpunkte oder durch zwei Seitenmittelpunkte. Falls die Spiegelachse durch zwei Eckpunkte von P_n geht, dann geht sie durch zwei Mittelpunkte von $R(P_n)$, (und umgekehrt). Deshalb ist die Spiegelung von unterschiedlichem "Typ" bezüglich P_n und $R(P_n)$.