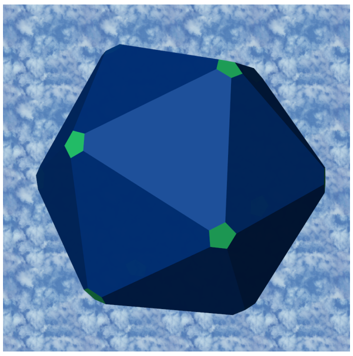
Lösung zu Serie 2

Aufgabe 1

Benutze Kaleidotile (`www.geometrygames.org/KaleidoTile/index.html`) um ein Bild einer Figur in $\mathbb{R}^3$ herzustellen, die kein reguläres Polyeder ist, aber dieselbe Symmetriemenge hat wie der Ikosaeder. Gibt es eine solche Figur, die nicht konvex ist?

Lösung:
Wenn man die Spitzen des Ikosaeders abschneidet, dann hat die Figur immernoch dieselben Symmetrien. Das sieht in KaleidoTile zum Beispiel so aus:

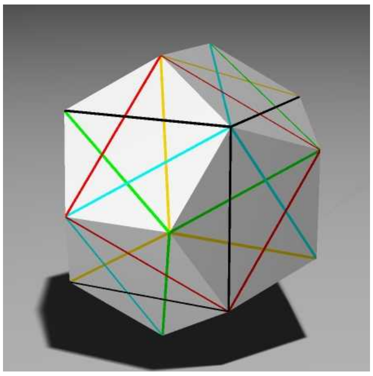


Eine Figur in $\mathbb{R}^n$ ist *konvex*, falls für beliebige zwei Punkte in der Menge, auch die ganze Verbindungslinie in der Figur liegt. Als Beispiel einer Figur, die nicht konvex ist, könnte man zum Beispiel den Ikosaeder nehmen und den Mittelpunkt entfernen.

Bemerkung: Die so entstandene Figur ist aber kein Polyeder. Indem man die grünen Fünfecke im Bild "eindrückt", kann man die Figur zu einem nicht konvexen Polyeder gemacht werden. In KaleidoTile können nur konvexe Polyeder dargestellt werden.

Exercise 2

Im Bild unten sind Würfel in einem Dodekaeder eingezeichnet. Können wir daraus folgern, dass die Symmetrie-Menge des Würfels eine Teilmenge der Symmetrie-Menge des Dodekaeders ist? Warum oder warum nicht?



Five cubes in the dodecahedron. S. Tatham, `http://www.chiark.greenend.org.uk`.

Lösung:
Die Symmetriemenge $\mathrm{Sym}(W)$ des Würfels W ist keine Teilmenge der Symmetriemenge $\mathrm{Sym}(D)$ des Dodekaeders D. Dazu kann man zum Beispiel die Rotation R um $90°$ betrachten, die den Würfel auf sich selber abbildet (Rotationsachse vom Typ Flächenmittelpunkt - Flächenmittelpunkt). Man sieht im Bild, dass diese Rotation keine Symmetrie des Dodekaeders ist.

Aufgabe 3

(a) Bestimme alle 24 Symmetrien des Tetraeders.

(b) Kann man jede Permutation (Vertauschung) der 4 Eckpunkte des Tetraeders durch eine Symmetrie realisieren?

(c) Wie viele "Arten" von Symmetrien besitzt das Tetraeder?

Lösung:

(a) Wir unterscheiden die Symmetrien danach, wieviele der vier Eckpunkte des Tetraeders sie fixieren.

Fall 1: Alle vier Punkte werden fixiert. Die entsprechende Symmetrie ist die Identität.

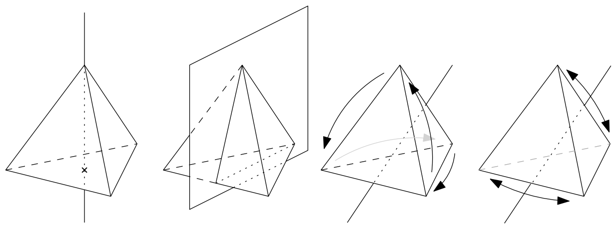
Fall 2: Genau drei Punkte werden fixiert. Das kann gar nicht passieren, da der letzte Punkt auch wieder auf einen Punkt gesendet werden muss.

Fall 3: Genau zwei Punkte werden fixiert. Dann müssen die anderen beiden Punkte vertauscht werden. Es gibt genau 6 solche Symmetrien, da das Tetraeder 6 Kanten hat.

Fall 4: Genau ein Punkt wird fixiert. Dann müssen die anderen Punkte zyklisch permutiert werden. Das entspricht einer Rotation um die Achse, die durch den fixierten Punkt und den Mittelpunkt geht. Es gibt 4 solche Achsen und man kann jeweils um 120° oder 240° rotieren, deshalb gibt es 8 solche Symmetrien.

Fall 5: Keiner der Punkte wird fixiert. Die restlichen Symmetrien können wie gefolgt beschrieben werden: Wir nehmen eine Achse, die durch den Mittelpunkt von zwei gegenüberliegenden Kanten (und den Mittelpunkt des Tetraeders) geht. Wenn man um 180° dreht, hat man eine Isometrie, die keinen Punkt fixiert. Von solchen Symmetrien gibt es 3, weil es 3 Paare von Kanten gibt. Alternativ kann man auch um 90° drehen (was noch keine Symmetrie ist) und anschliessend an der Ebene spiegeln, die senkrecht zur Achse liegt (und durch den Mittelpunkt geht). Diese kombinierte Symmetrie fixiert auch keine Punkte und es gibt 6 davon (drei Kantenpaare und rotation um 90° oder 270°).

Damit haben wir $1 + 6 + 8 + 3 + 6 = 24$ Symmetrien des Tetraeders.



Fall 3, Fall 4, Fall 5 .

(b) Eine Menge von 4 Elementen kann höchstens auf 24 verschiedene Arten permutiert werden: Das erste Element hat vier Möglichkeiten, das zweite noch 3 und so weiter, was in $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Arten resultiert. Wir können daraus schliessen, dass es keine weitere Symmetrien gibt, als die 24 gefundenen.

(a) Aus der Aufzählung in (a) erkennen wir 5 "Arten" von Symmetrien, nämlich die Identität, Rotation (um 120° oder 240°) um Achse wie in Fall 3, Spiegelung an Ebene wie in Fall 4, Rotation-Spiegelkombi wie in Fall 5 und Rotation um 120° wie in Fall 5.

Aufgabe 4

Was für eine Figur könnte das Schläfli-Symbol $(n,2)$ beschreiben?

Lösung:
Es muss sich um eine Figur handeln, die aus regelmässigen n-Ecken zusammengesetzt ist. Ausserdem müssen sich an jedem Ecken genau 2 solche Facetten treffen. Das entspricht zwei n-Ecken, die an den Kanten zusammengeklebt werden. Das ist also ein n-Eck im $\mathbb{R}^3$, also ein Körper mit

Volumen 0. Mit griechischen Wörtern könnte man das ein Di-Eder (Zwei-Flach) (analog zu Dodeka-Eder = Zwölf-Flach) nennen und tatsächlich ist die Diedergruppe, die Symmetriegruppe des regelmässigen n-Ecks danach benannt.

Aufgabe 5 (*)

In dieser Aufgabe rechnet man in Koordinaten.

(a) Gib die Eckpunkte eines n-dimensionalen Würfels (oder *Hyperwürfels*) an.

(b) Gib die Facetten (die $(n-1)$-dimensionalen "Seiten") des n-Würfels an.

(c) Wieviele Eckpunkte und Facetten hat der n-Würfel?

Lösung:

(a) Die Menge der Eckpunkte ist gegeben durch

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_i \in \{-1, 1\} \text{ für alle } i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

(b) Für jede Richtung $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ gibt es zwei Facetten, nämlich

$$F_j^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_j = 1 \text{ und } x_i \in [-1, 1] \text{ für alle } i \neq j\},$$
$$F_j^- = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_j = -1 \text{ und } x_i \in [-1, 1] \text{ für alle } i \neq j\}.$$

Insgesamt gibt es also $2n$ Facetten und die Menge der Facetten ist

$$\left\{F_j^+ \colon j \in \{1, 2, \dots, n\}\right\} \cup \left\{F_j^- \colon j \in \{1, 2, \dots, n\}\right\}.$$

(c) Aus (a) und (b) ist ersichtlich, dass es 2^n Eckpunkte und $2n$ Facetten hat.

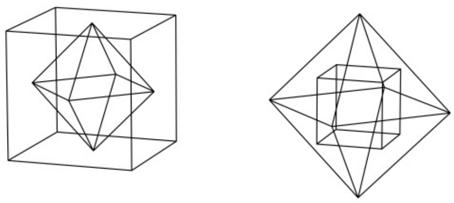
Der n-*Orthoplex* (oder *Kreuzpolytop* oder *Hyperoktaeder*) ist das reguläre Polytop, das dual zum n-Würfel ist.

(d) Berechne die Eckpunkte eines n-Orthoplexes als Mittelpunkte der Facetten des n-Würfels.

(e) Gib die Facetten des n-Orthoplexes an.

(f) Berechne die Eckpunkte eines (kleineren) n-Würfels als Mittelpunkte der Facetten des n-Orthoplexes.

(g) Wieviele Eckpunkte und Facetten hat das n-Orthoplex?



Source: Knoerrer, Brieskorn I.

Lösung:

(d) Die Menge der Eckpunkte ist gegeben durch

$$\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \exists i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} : x_i \in \{-1, 1\} \\ \text{und } \forall j \neq i \colon x_j = 0 \end{array}\right\}$$

(e) Die Facette im positiven Quadrant ist gegeben durch die Menge

$$\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \colon x_i \in [0, 1] \\ \text{und } x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \end{array}\right\}$$

Bemerke, dass n Seitenmittelpunkte aus (d) in der Facette enthalten sind. Die anderen Facetten sind durch eine ähnliche Formel gegeben, wobei I_i für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jeweils enweder das Interval $[-1, 0]$ oder $[0, 1]$ ist:

$$\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \colon x_i \in I_i \\ \text{und } |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = 1 \end{array}\right\}$$

Es gibt insgesamt 2^n solche Facetten, da es für jedes I_i zwei Möglichkeiten gibt.

(f) Die Menge der Eckpunkte des kleineren n-Würfels ist gegeben durch

$$\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \colon x_i \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}\right\}$$

(g) Das n-Orthoplex hat $2n$ Eckpunkte und 2^n Facetten. Das folgt aus der Betrachtung von (d) und (e) oder aus (c) und daraus dass es dual zum n-Würfel ist.