Lösung zu 3

Aufgabe 1

Seien φ und ψ Isometrien des $\mathbb{R}^n$. Beweise oder widerlege.

(a) Falls p ein Fixpunkt von φ und ψ ist, so ist p auch ein Fixpunkt von $\psi \circ \varphi$.

Lösung:
Wir haben $(\psi \circ \varphi)(p) = \psi(\varphi(p)) = \psi(p) = p$, also ist p auch ein Fixpunkt von $\psi \circ \varphi$.

(b) Falls p ein Fixpunkt von $\psi \circ \varphi$ ist, so ist p auch ein Fixpunkt von φ und von ψ.

Lösung:
Nein, das stimmt nicht. Wir können ein Gegenbeispiel geben: Sei $\psi = \varphi$ die Punktspiegelung an 0. Dann ist jeder Punkt ein Fixpunkt von $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$, aber nur 0 ist ein Fixpunkt von ψ und φ.

(c) Falls p ein Fixpunkt von φ ist, so ist p auch ein Fixpunkt von φ^{-1}.

Lösung:
Sei p ein Fixpunkt von φ, also $\varphi(p) = p$. Wenn wir auf beiden Seiten φ^{-1} anwenden, dann haben wir $\varphi^{-1}(\varphi(p)) = \varphi^{-1}(p) =$, also $p = \varphi^{-1}(p)$, also ist p ein Fixpunkt von φ^{-1}.

(d) $\mathrm{Fix}(\psi\circ\varphi)$ und $\mathrm{Fix}(\varphi\circ\psi)$ sind isometrisch (das heisst, es gibt eine bijektive Isometrie $\mathrm{Fix}(\psi \circ \varphi) \to \mathrm{Fix}(\varphi \circ \psi)$).

Lösung:
Wir zeigen, dass $\varphi(\mathrm{Fix}(\psi \circ \varphi)) = \mathrm{Fix}(\varphi \circ \psi)$. Dazu müssen wir zwei Inklusionen zeigen.

($\subset$) Sei $p \in \mathrm{Fix}(\psi \circ \varphi)$, dann $(\varphi \circ \psi)(\varphi(p)) = \varphi((\psi \circ \varphi)(p)) = \varphi(p)$, also $\varphi(p) \in \mathrm{Fix}(\varphi \circ \psi)$.

($\supset$) Sei $p \in \mathrm{Fix}(\varphi \circ \psi)$, dann definieren wir $q = \psi(p)$. Wir haben also $(\psi \circ \varphi)(q) = \psi(\varphi(\psi(p))) = \psi((\varphi \circ \psi)(p)) = \psi(p) = q$, also $q \in \mathrm{Fix}(\psi\circ\varphi)$. Weil $\varphi(q) = \varphi(\psi(p)) = (\varphi\circ\psi)(p) = p$ können wir schliessen, dass $p \in \varphi(\mathrm{Fix}(\psi \circ \varphi))$.

φ ist die gesuchte Isometrie zwischen den Mengen.

(e) Falls $\varphi^2 = \mathrm{id}$ gilt, so hat φ einen Fixpunkt.

Lösung:
Sei p ein Punkt. Sei M der Mittelpunkt von p und $\varphi(p)$, das heisst M ist der eindeutige Punkt, der auf der Linie $\overline{p\varphi(p)}$ liegt und $d(p, M) = d(M, \varphi(p))$ erfüllt. Wir sehen, dass der Punkt $\varphi(M)$ ebenfalls auf der Linie $\overline{\varphi(p)\varphi^2(p)} = \overline{\varphi(p)p} = \overline{p\varphi(p)}$ liegt. Da φ eine Isometrie ist, gilt auch $d(p, \varphi(M)) = d(\varphi^2(p), \varphi(M)) = d(\varphi(p), M) = d(p, M) = d(\varphi(p), \varphi(M))$. Sowohl M als auch $\varphi(M)$ sind also Mittelpunkte von p und $\varphi(p)$, was heisst, dass sie gleich sind. Also hat φ einen Fixpunkt, nämlich M.

(f) Falls φ einen Fixpunkt hat, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\varphi^n = \mathrm{id}$.

Lösung:
Das stimmt nicht. Sei $x \in [0, 1]$ eine irrationale Zahl. Dann hat die Rotation φ um den Winkel $x \cdot 360°$ zwar einen Fixpunkt, aber es gibt kein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\varphi^n = \mathrm{id}$.

Beweis: Wir bemerken, dass φ^n die Rotation um den Winkel $n \cdot x \cdot 360°$ ist. Die Aussage $\varphi^n = \mathrm{id}$ gilt genau dann wenn $n \cdot x \in \mathbb{Z}$, aber falls $n \cdot x = z \in \mathbb{Z}$, dann ist $x = z/n$ eine rationale Zahl. Da x irrational gewählt wurde, folgt, dass $\varphi^n \neq \mathrm{id}$.

Aufgabe 2

Welche Hintereinanderschaltungen von nicht-trivialen Isometrien im $\mathbb{R}^3$ sind möglich? Mit Begründung.

(a) $(\text{Drehspiegelung})^4 = \text{Drehung}$.

Lösung:
Drehspiegelungen $M_\theta(A, E)$ sind durch eine Drehung $D_\theta(A)$ um einen Winkel θ um die Drehachse A und eine Spiegelung σ_E an der Ebene E senkrecht zur Drehachse A definiert: $M_\theta(A, E) = D_\theta(A) \circ \sigma_E$. Wir bemerken, dass die Drehung und die Spiegelung vertauscht werden können (sie kommutieren) $M_\theta(A, E) = D_\theta(A) \circ \sigma_E = \sigma_E \circ D_\theta(A)$. Also ist $M_\theta(A, E)^4 = D_\theta(A)^4 \circ \sigma_E^4 = D_\theta(A)^4 = D_{4\theta}(A)$ eine Drehung.

(b) $(\text{Drehung})^7 = \text{Geradenspiegelung}$.

Lösung:
Eine Geradenspiegelung ist ein Spezialfall einer Drehung, sie kann nämlich beschrieben werden durch $D_{180°}(A)$. Wenn man also als Drehung zum Beispiel $D_{180°/7}(A)$ nimmt, dann ist die Gleichung erfüllt. Diverse andere Möglichkeiten gehen auch, zum Beispiel ist $D_{180°}(A)^7 = D_{180°}(A)$.

(c) Drehung $\circ$ Translation $=$ Drehung.

Lösung:
Im $\mathbb{R}^3$ gilt diese Gleichung nicht immer (man könnte zum Beispiel eine Schraubung bekommen), aber für gewisse Drehungen und Translationen ist es möglich, nämlich wenn die Translation senkrekt zur Rotationsachse der Drehung stattfindet: Sei $D_{90^\circ}(A)$ die Rotation um die Achse $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = 0, y = -1\}$ und $T_{(2,0,0)}$ eine Translation. Dann gilt $D_{90^\circ}(A) \circ T_{(2,0,0)} = D_{90^\circ}(A')$, wo $A' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = -1, y = 0\}$ ist. Um das zu beweisen, könnte man verwenden, dass A' eine Fixgerade von $D_{90^\circ}(A) \circ T_{(2,0,0)}$ ist. Nach der Klassifikation der Isometrien im $\mathbb{R}^3$, muss es sich dabei um eine Drehung handeln (OE und Fixpunkte impliziert Identität, Linienspiegelung oder Drehung).

(d) Translation $\circ$ Drehung $=$ Translation.

Lösung:
Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$\text{Translation} \circ \text{Translation} = \text{Drehung}$$

und das kann nur gelten, wenn sich die beiden Translationen aufheben und die triviale Drehung (die Identität) herauskommt.

(e) Drehung $\circ$ Translation $=$ Drehspiegelung.

Lösung:
Orientierungserhaltend $\circ$ Orientierungserhaltend muss wieder Orientierungserhaltend sein, also kann diese Gleichung nicht erfüllt werden.

(f) Drehspiegelung $\circ$ Gleitspiegelung $=$ Schraubung.

Lösung:
Sei $M_\theta(A,E) = D_\theta(A) \circ \sigma_E$ eine Drehspiegelung und $G_t(F) = T_t \circ \sigma_F = \sigma_F \circ T_t$ eine Gleitspiegelung, so dass A senkrecht zu E und t parallel zu F ist. Wir wählen die Ebenen E und F parallel, aber nicht gleich. Wir bemerken, dass indiesem Fall die Ebenenspiegelungen als Translation geschrieben werden können, $\sigma_E \circ \sigma_F = T_r$ für einen Vektor r senkrecht zu E und F. Dann haben wir $M_\theta(A,E) \circ G_t(F) = D_\theta(A) \circ \sigma_E \circ \sigma_F \circ T_t = D_\theta(A) \circ T_r \circ T_t = D_\theta(A) \circ T_t \circ T_r = D_\theta(A') \circ T_r$, wobei A' eine neue Achse, parallel zu A ist (vergleiche Teilaufgabe (c)). Wir haben r senkrecht zu E, und E senkrecht zu A, also r parallel zu A'. Somit ist $M_\theta(A,E) \circ G_t(F) = D_\theta(A') \circ T_r = S_\theta(A',t)$ eine Schraubung.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass das Produkt zweier Inversionen in $\mathbb{R}^2$ eine Translation ist.

Lösung:
Inversionen am Punkt p sind explizit gegeben durch

$$\begin{aligned}\sigma_p\colon\ \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2\\ x &\mapsto 2p - x.\end{aligned}$$

Seien p und q die Inversionspunkte. Wir sehen, dass

$$\begin{aligned}(\sigma_p \circ \sigma_q)(x) &= \sigma_p(\sigma_q(x)) = \sigma_p(2q - x) = 2p - (2q - x)\\ &= 2(p - q) + x = T_{2(p-q)}(x)\end{aligned}$$

eine Translation um den Vektor $2(p - q)$.

Aufgabe 4

Sei $F \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Figur mit endlicher Symmetriemenge $\mathrm{Sym}(F)$. Zeige, dass entweder keine oder genau die Hälfte der Elemente von $\mathrm{Sym}(F)$ orientierungsumkehrend sind.

Lösung:
Falls eine orientierungsumkehrende (OU) Symmetrie $\sigma \in \mathrm{Sym}(F)$ existiert, dann ist auch σ^{-1} OU, weil $\sigma \circ \sigma^{-1} = \mathrm{id}$ orientierungserhaltend (OE) ist. Wir behaupten, dass es eine bijektive Abbildung f

$$\begin{aligned}\{\psi \in \mathrm{Sym}(F)\colon \psi \text{ ist OE}\} &\to \{\varphi \in \mathrm{Sym}(F)\colon \varphi \text{ ist OU}\}\\ \psi &\overset{f}{\mapsto} \psi \circ \sigma\\ \varphi \circ \sigma^{-1} &\overset{f^{-1}}{\leftarrow\!\shortmid} \varphi\end{aligned}$$

gibt. Um das zu zeigen müssen wir zeigen, dass f und f^{-1} wohldefiniert sind und dass sie Inverse voneinander sind.

Wir bemerken, dass f wohldefiniert ist, nämlich ist für jede orientierungserhaltende (OE) Symmetrie ψ, $f(\psi) = \psi \circ \sigma$ eine OU Symmetrie. Andererseits, wenn man mit einer OU Symmetrie φ beginnt, dann ist $f^{-1}(\varphi) = \varphi \circ \sigma$ eine OE Symmetrie und somit ist f^{-1} wohldefiniert.

Wir müssen noch zeigen, dass $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{OU}$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{OE}$:

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(\varphi) &= f(f^{-1}(\varphi)) = f(\varphi \circ \sigma^{-1}) = \varphi \circ \sigma^{-1} \circ \sigma = \varphi \circ \mathrm{id} = \varphi\\ (f^{-1} \circ f)(\psi) &= f^{-1}(f(\psi)) = f^{-1}(\psi \circ \sigma) = \psi \circ \sigma \circ \sigma^{-1} = \psi \circ \mathrm{id} = \psi\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass f eine Bijektion zwischen endlichen Mengen ist, somit haben die beiden Mengen gleich viele Elemente.

Aufgabe 5

Wieviel reelle Zahlen (Freiheitsgrade) braucht es, um eine Gerade im Raum $\mathbb{R}^3$ vollständig zu bestimmen?

Lösung:
Wir betrachten eine Gerade im Raum. Es gibt einen eindeutigen Punkt p auf der Gerade, der den kleinsten Abstand zum Nullpunkt hat. Wenn wir die Kugel mit Radius $d(0, p)$ betrachten, so berührt die Gerade die Kugel tangential. Der Berührungspunkt auf der Kugel ist durch drei Koordinaten gegeben (x, y, z oder zwei Winkel und der Radius). Wie die Gerade in der Tangentialebene liegt, kann durch einen weiteren Winkel beschrieben werden. Das sind insgesammt vier Freiheitsgrade.