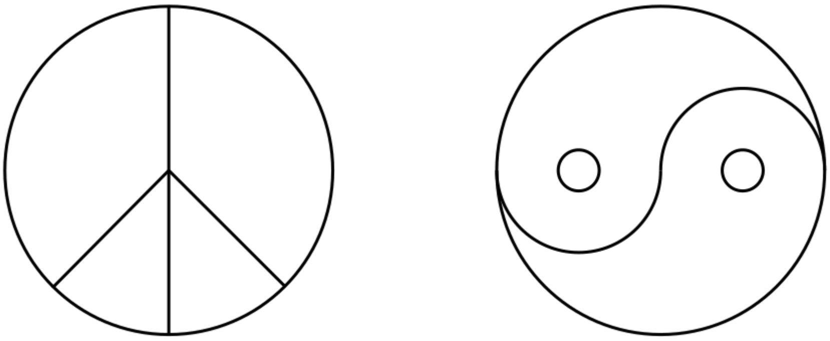
Lösung Serie 4

Aufgabe 1

Zeigen sie, dass die Symmetriegruppen der folgenden zwei Figuren im $\mathbb{R}^2$ isomorph sind, aber nicht identisch:



Lösung:
Die Symmetriegruppe G des Peace-Symbols besteht aus der Identität id und einer Spiegelung s. Die Symmetriegruppe H des Yin-Yang-Symbols besteht aus der Identität id und einer Rotation um $180°$ r. Die Gruppenoperation ist in beiden Fällen die Hintereinanderschaltung $\circ$.

Ein Isomorphismus ist gegeben durch die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon G &\to H \\ \mathrm{id} &\mapsto \mathrm{id} \\ s &\mapsto r \end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, dass f ein Gruppenhomomorphismus ist, dass also für alle $g, h \in G$ gilt $f(g \circ h) = f(g) \circ f(h)$. Wir können das durch eine Auflistung machen:

$$\begin{aligned} f(\mathrm{id} \circ \mathrm{id}) &= f(\mathrm{id}) = \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ \mathrm{id} = f(\mathrm{id}) \circ f(\mathrm{id}) \\ f(\mathrm{id} \circ s) &= f(s) = r = \mathrm{id} \circ r = f(\mathrm{id}) \circ f(s) \\ f(s \circ \mathrm{id}) &= f(s) = r = r \circ \mathrm{id} = f(s) \circ f(\mathrm{id}) \\ f(s \circ s) &= f(\mathrm{id}) = \mathrm{id} = r \circ r = f(s) \circ f(s) \end{aligned}$$

Die Funktion ist auch bijektiv, also handelt es sich um einen Isomorphismus.

Obwohl die Symmetriegruppen isomorph sind, sind sie nicht gleich. Das sieht man zum Beispiel daran, dass die Spiegelung orientierungsumkehrend ist und die Rotation orientierungserhaltend. Deshalb können sie nicht die gleiche Isometrie sein, egal wie man die Figuren in der Ebene platziert.

Aufgabe 2

Verwende den Satz über affine Punktmengen um zu argumentieren, dass die Symmetriegruppe des regelmässigen 8-Ecks in $\mathbb{R}^2$ nicht mehr als 16 Elemente hat.

Lösung:

Der Satz über affine Punktmengen in $\mathbb{R}^2$ besagt, dass eine Isometrie durch ihr Bild von drei nicht kolinearen (=affin unabhängigen) Punkten vollständig bestimmt ist.

Eine Symmetrie φ des 8-Ecks ist insbesondere eine Isometrie. Da benachbarte Eckpunkte näher beieinander sind als alle anderen Eckpunkte, können wir folgern, dass φ benachbarte Punkte wieder auf benachbarte Punkte schickt. Wenn wir einen Punkt p sowie seine zwei Nachbarn q und r anschauen, bemerken wir, dass sie nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, sie sind affin unabhängig. Mit dem Satz müssen wir also nur wissen, was mit diesen drei Punkten passieren kann, um die Symmetrien des 8-Ecks herauszufinden.

Da Eckpunkte wieder auf Eckpunkte geschickt werden müssen, gibt es für $\varphi(p)$ höchstens 8 Möglichkeiten. Für jede dieser 8 Möglichkeiten muss $\varphi(q)$ benachbart von $\varphi(p)$ sein, also gibt es zwei weitere Möglichkeiten. Der Punkt $\varphi(r)$ ist durch die vorherigen zwei Wahlen vollständig bestimmt und mit dem Satz ist die ganze Symmetrie φ vollständig bestimmt. Es gibt also höchstens $16 = 2 \cdot 8$ Möglichkeiten für φ.

Wenn man noch zweigen wollte, dass es genau 16 sind, dann müsste alle 16 aufzählen (dabei handelt es sich um Rotationen und Spiegelungen).

Aufgabe 3

(i) Man konstruire die Multiplikationstafel der Einheitsquaternionen[1] $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, die $-1 = i^2 = j^2 = k^2 = ijk$ erfüllen.

(ii) Man konstruire die Multiplikationstafel der Diedergruppe $D_4 = \mathrm{Sym}(P_4)$.

(iii) Kann man die eine in die andere durch schlaue Symbolensubstitutionen umwandeln? (Existiert ein Isomorphismus?)

(iv) Gibt es unendlich viele verschiedene Isomorphieklassen von Gruppen mit 8 Elementen?

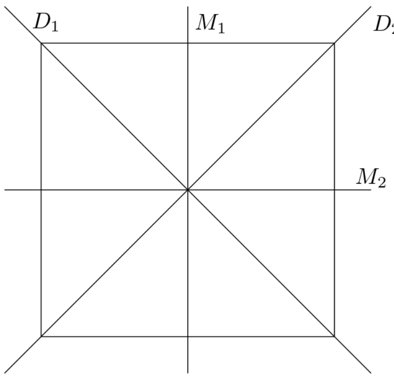
Lösung:

[1] Eine kurze Definition der Quaternionen findet man im Skript, Chapter 7, Section 28.

(i) Aus $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ kann man die ganze Multiplikationstafel der Quaternionen ausfüllen:

$\circ$	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
1	1	i	j	k	-1	$-i$	$-j$	$-k$
i	i	-1	k	$-j$	$-i$	1	$-k$	j
j	j	$-k$	-1	i	$-j$	k	1	$-i$
k	k	j	$-i$	-1	$-k$	$-j$	i	1
-1	-1	$-i$	$-j$	$-k$	1	i	j	k
$-i$	$-i$	1	$-k$	j	i	-1	k	$-j$
$-j$	$-j$	k	1	$-i$	j	$-k$	-1	i
$-k$	$-k$	$-j$	i	1	k	j	$-i$	-1

(ii) Seien $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ die Drehungen um O von $0°, 90°, 180°$ und $270°$ (in Gegenuhrzeigersinn). Seien $\mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2$ die Spiegelungen durch M_1, M_2, D_1 und D_2.



Dann sieht die Multiplikationstafel so aus:

$\circ$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	δ_2	μ_2	δ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	δ_1	μ_1	δ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
δ_1	δ_1	μ_1	δ_2	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_2	δ_1	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

(iii) Nein. D_4 enthält fünf Elemente $g \neq \mathrm{id}$ sodass $g^2 = \mathrm{id}$, nämlich ρ_2, μ_1, μ_2, δ_1 und δ_2; die Quaternionengruppe entählt nur ein Element $g \neq \mathrm{id}$ sodass $g^2 = \mathrm{id}$, nämlich -1.

(iv) Nein. Die Isomorphieklasse ist durch die Gruppentafel gegeben. Es gibt nur endlich viele Möglichkeiten, 8 Symbole in einer 8×8-Tabelle darzustellen. Es ist ein nicht-trivialer Fakt, dass es genau 5 Isomorphieklassen der Ordnung 8 gibt. Es gibt Listen, die alle Isomorphieklassen von kleinen Gruppen aufzählen.

Aufgabe 4 — Wahr oder Falsch

Sei G eine Gruppe und $g, h \in G$. Stimmen die folgenden Aussagen immer?

(i) Aus $g^2 = h^2$ folgt $g = h$.

(ii) Es sei $n > 0$. Aus $h^n = 1$ folgt $(ghg^{-1})^n = 1$.

(iii) Für jedes $n > 1$ besitzt die Gleichung $h^n = g$ eine Lösung h in G.

(iv) Die Gleichung $gxg = h$ besitzt genau eine Lösung $x \in G$.

(v) Besteht G aus Isometrien von $\mathbb{R}^3$, die einen gemeinsamen Fixpunkt besitzt, so ist G endlich.

Lösung:

(i) Falsch. Alle Spiegelungen g und h erfüllen $g^2 = \mathrm{id} = h^2$, aber es sind nicht alle Spiegelungen gleich.

(ii) Wahr. Berechne $(ghg^{-1})^n = \underbrace{ghg^{-1}\ ghg^{-1} \cdots ghg^{-1}}_{n\ -\mathrm{mal}} = gh^ng^{-1} = gg^{-1} = 1$.

(iii) Falsch. In der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist die Menge $n\,\mathbb{Z}$ der n-ten Potenzen für $n > 1$ eine echte Teilmenge.

(iv) Wahr. Das Element $x := ghg^{-1} \in G$ löst die Gleichung. Falls ein beliebiges Element $x \in G$ die Gleichung löst, so ergibt sich durch Umformen mithilfe der Kürzungsregel: $x = ghg^{-1}$.

(v) Falsch. Die Symmetrie-Gruppe eines Kreises ist unendlich.

Aufgabe 5

(i) Finde eine Menge und eine Operation, die alle Eigenschaften einer Gruppe erfüllt, ausser der Existenz einer Inverse.

(ii) Ist die Menge endlich?

(iii) Erfüllt das Beispiel die Kürzungsregel?

Lösung:
Ein solches Beispiel ist gegeben durch $(\mathbb{Z}, \cdot)$. Die ganzen Zahlen sind abgeschlossen bezüglich Multiplikation, Assoziativität gilt und die 1 ist ein neutrales Element. Aber es gibt kein inverses Element für alle Zahlen ausser ± 1.

Die Menge $\mathbb{Z}$ ist nicht endlich und die Kürzungsregel gilt nicht, zum Beispiel $0\dot{1} = 0 = 0 \cdot 2$, aber $1 \neq 2$.

Fun Fact: Falls eine endliche Menge Abgeschlossenheit, Assoziativität, Neutrales Element und Kürzungsregel erfüllt, dann ist es automatisch eine Gruppe.

Ein Beispiel einer endlichen Menge, die die Kürzungsregel nicht erfüllt (und somit keine Gruppe ist) ist $\{0, 1\}$ mit der Operation min:

min	0	1
0	0	0
1	0	1