Lösungen Serie 5

Aufgabe 1

(a) Finde zyklische Gruppen mit genau 1, 2 oder 4 unterschiedlichen Generatoren.

(b) Zeige, dass keine zyklische Gruppe genau 3 Generatoren hat.

Lösung:

(a) Wir bemerken, dass jede zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_n = \{1, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}\}$ von einem Element erzeugt wird, falls n gross genug ist, gibt es aber noch weitere Elemente, die $\mathbb{Z}_n$ generieren. $\mathbb{Z}_2 = \{1, \sigma\} = \langle\sigma\rangle$ ist von einem Element erzeugt. $\mathbb{Z}_3 = \{1, \sigma, \sigma^2\} = \langle\sigma\rangle = \langle\sigma^2\rangle$, da $(\sigma^2)^2 = \sigma$ ist. $\mathbb{Z}_4 = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\} = \langle\sigma\rangle = \langle\sigma^3\rangle$ hat ebenfalls 2 Generatoren, aber σ^2 ist kein Generator von $\mathbb{Z}_4$. In $\mathbb{Z}_5$ sind alle nicht-trivialen Elemente Generatoren, und somit hat es 4.

(b) Wir bemerken, dass die unendliche zyklische Gruppe $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \langle 1\rangle = \langle -1\rangle$ genau zwei Generatoren hat.

Wir nehmen also an, dass es ein $n \geq 3$ gibt, so dass $\mathbb{Z}_n$ genau 3 Generatoren hat und möchten das zu einem Widerspruch führen. Wir bemerken, dass σ und σ^{n-1} immer Generatoren sind von $\mathbb{Z}_n$. Es bleibt also noch ein weiterer Generator, nämlich σ^k für ein $k \in \{2, 3, \ldots, n-2\}$: $\mathbb{Z}_n = \langle\sigma^k\rangle$. Weil das Inverse eines Generators wieder ein Generator ist, muss gelten $(\sigma^k)^{-1} = \sigma^{n-k} = \sigma^k$. Also gilt $n - k = k$ und somit $k = n/2$, insbesondere ist n gerade. Aber dann $\langle\sigma^{n/2}\rangle = \{1, \sigma^{n/2}\} \neq \mathbb{Z}_n$, weil $n \geq 3$. Dann generiert σ^k nicht $\mathbb{Z}_n$, was ein Widerspruch ist.

Aufgabe 2

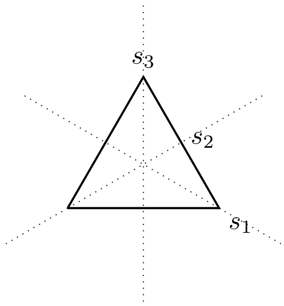
Sei D_n die Diedergruppe der Ordnung $2n$, $n \geq 2$.

(a) Zeigen Sie, dass D_n von zwei Spiegelungen erzeugt werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass D_n von einer Spiegelung und einer Drehung erzeugt werden kann.

(c) Warum kann D_n nicht von einem einzelnen Element erzeugt werden?

Lösung:
Die Diedergruppe D_n besteht aus der Identität sowie $n-1$ Drehungen und n Spiegelungen. Wir schreiben $D_n = \{r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n\}$, wobei r_k ($k \in \{1, \ldots, n\}$) die Drehung um den Schwerpunkt um den Winkel $2\pi k/n$ bezeichnet. Insbesondere ist r_n die Identität. Die Spiegelungen s_k seien so gewählt, dass für jedes $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ die Achse von s_k mit der von s_{k+1} einen positiven Winkel von $2\pi/2n$ bildet.



(a) Betrachte die aufeinanderfolgenden Spiegelungen s_1 und s_2, deren Achsen den positiven Winkel $2\pi/2n$ einschließen. Dann gilt $s_2 \circ s_1 = r_1$. Die von s_1 und s_2 erzeugte Untergruppe von D_n enthält damit alle Drehungen $r_k = r_1^k$ ($k \in \{1, \dots, n\}$). Da außerdem $s_{k+2} = r_1 s_k r_1^{-1}$ gilt, erhalten wir iterativ alle Spiegelungen.

(b) Wir wählen r_1 und s_1. Wie oben enthält die von r_1 und s_1 erzeugte Untergruppe von D_n alle Drehungen $r_k = r_1^k$ ($k \in \{1, \dots, n\}$) sowie die Spiegelungen mit ungeradem Index. Da außerdem $s_2 = s_1 \circ r_{n-1}$, erhalten wir ebenfalls alle Spiegelungen mit geradem Index.

(c) Es sei g ein Element von D_n. Wenn g die Identität ist, so erzeugt g die triviale Untergruppe. Falls g eine nicht-triviale Drehung ist, so erzeugt g eine Untergruppe der Gruppe der Drehungen. Schließlich, wenn g eine Spiegelung ist, so erzeugt g die Untergruppe $\{\mathrm{id}, g\}$. In keinem Fall stimmt die von g erzeugte Untergruppe mit ganz D_n überein.

Aufgabe 3

Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Menge der Automorphismen

$$\mathrm{Aut}(G) = \{\varphi\colon G \to G \colon \varphi \text{ ist ein Gruppenisomorphismus}\}$$

mit der Hintereinanderschaltung $\circ$ eine Gruppe ist.

Lösung:
Wir bezeichnen mit $*$ die Gruppenoperation auf G (d.h. G ist die Gruppe $(G, *)$) und wir zeigen, dass $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ eine Gruppe ist.

1) (Abgeschlossenheit) Wir zeigen, dass falls φ und ψ in $\mathrm{Aut}(G)$ sind, dann ist auch $\varphi \circ \psi$ in $\mathrm{Aut}(G)$. Aus der Bijektivität von φ und ψ folgt die Bijektivität von $\varphi \circ \psi$. Ausserdem gilt für $g, h \in G$, dass

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \psi)(g * h) &= \varphi\big(\psi(g * h)\big) = \varphi\big(\psi(g) * \psi(h)\big) \\ &= \varphi\big(\psi(g)\big) * \varphi\big(\psi(h)\big) = (\varphi \circ \psi)(g) * (\varphi \circ \psi)(h),\end{aligned}$$

was zeigt, dass $\varphi \circ \psi$ ein Homomorphismus ist. Somit gilt $\varphi \circ \psi \in \mathrm{Aut}(G)$.

2) (Assoziativität) Sei $\varphi, \psi, \vartheta \in \operatorname{Aut}(G)$. Wir müssen zeigen, dass $(\varphi\circ\psi)\circ\vartheta = \varphi\circ(\psi\circ\vartheta)$ gilt. Zwei Abbildungen sind gleich, wenn sie ausgewertet an allen Elementen gleich sind. In der Tat gilt für jedes $g \in G$

$$\begin{aligned}((\varphi\circ\psi)\circ\vartheta)(g) &= (\varphi\circ\psi)(\vartheta(g)) = \varphi(\psi(\vartheta(g)))\\ &= \varphi((\psi\circ\vartheta)(g)) = (\varphi\circ(\psi\circ\vartheta))(g),\end{aligned}$$

wobei wir wiederholt die Definition von $\circ$ verwendet haben, nämlich $(\varphi\circ\psi)(g) := \varphi(\psi(g))$.

3) (Neutrales Element) Bemerke, dass die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_G\colon G \to G$ ein bijektiver Homomorphismus ($\mathrm{id}_G(g*h) = g*h = \mathrm{id}_G(g)*\mathrm{id}_G(h)$ für alle $g, h \in G$) ist, also $\mathrm{id}_G \in \operatorname{Aut}(G)$. Wir müssen zeigen, dass $\mathrm{id}_G\circ\varphi = \varphi\circ\mathrm{id}_G = \varphi$ für alle $\varphi \in \operatorname{Aut}(G)$. In der Tat, für $g \in G$ haben wir

$$(\mathrm{id}_G\circ\varphi)(g) = \mathrm{id}_G(\varphi(g)) = \varphi(g) = \varphi(\mathrm{id}_G(g)) = (\varphi\circ\mathrm{id}_G)(g).$$

4) (Inverses) Es sei $\varphi \in \operatorname{Aut}(G)$, also ist φ ein bijektiver Homomorphismus. Jede bijektive Abbildung hat eine Inverse $\vartheta = \varphi^{-1}\colon G \longrightarrow G$, sodass $\vartheta\circ\varphi = \varphi\circ\vartheta = \mathrm{id}_G$. Inverse sind ebenfalls bijektiv. Es bleibt noch zu zeigen, dass ϑ ein Gruppenhomomorphismus ist. Seien $g, h \in G$, dann verwenden wir zuerst, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist

$$\begin{aligned}\varphi\big(\vartheta(g)*\vartheta(h)\big) &= \varphi(\vartheta(g))*\varphi(\vartheta(h)) = (\varphi\circ\vartheta)(g)*(\varphi\circ\vartheta)(h)\\ &= id_G(g)*\mathrm{id}_G(h) = g*h,\end{aligned}$$

Wir wenden auf beiden Seiten ϑ an, und bekommen

$$\begin{aligned}\vartheta(g*h) &= \vartheta\Big(\varphi\big(\vartheta(g)*\vartheta(h)\big)\Big) = (\vartheta\circ\varphi)\big(\vartheta(g)*\vartheta(h)\big)\\ &= \mathrm{id}_G\big(\vartheta(g)*\vartheta(h)\big) = \vartheta(g)*\vartheta(h)\end{aligned}$$

Somit ist ϑ in $\operatorname{Aut}(G)$. Somit hat jedes $\varphi \in \operatorname{Aut}(G)$ ein Inverses $\vartheta \in \operatorname{Aut}(G)$.

Aufgabe 4

Mache folgende Berechnungen mit Permutationen

(1) $(54)(13)(2) = (13)(45)$

(2) $(13)(34)(135) = (14)(41)(35)(14)$

(3) $[(132)(45)]^6 = \mathrm{id}$

(4) $(123)(41253)(12)(123)^{-1} = (42351)(23)$. Siehst du eine Regelmässigkeit?

Lösung:

(1) Die Permutation $(54)(13)(2)$ sagt aus, dass 5 mit 4 und 1 mit 3 vertauscht wird. Es kommt nicht darauf an, welches Paar man zuerst vertauscht. Die Zahl 2 wird auf sich selber abgebildet, nach Konvention kann man (2) somit auch weglassen.

(2) Wenn mehrere Permutationen da stehen ist es wichtig in welcher Reihenfolge man sie ausführt. Wir verstehen Permutationen als Funktionen, die den Input von rechts bekommen. Zum Beispiel gilt $(123)(42)[4] = (123)[2] = 3$. Jede Permutation kann in eine Standardform gebracht werden in der jede Zahl höchstens ein mal vorkommt. Indem man von rechts nach links geht sieht man, dass die Permutation $(13)(34)(135)$ folgenden Effekt hat: $1 \mapsto 3 \mapsto 4$, $4 \mapsto 3 \mapsto 1$. Die 2 wird nicht verändert und $3 \mapsto 5$, $5 \mapsto 1 \mapsto 3$. Somit ist $(13)(34)(135) = (14)(2)(35) = (14)(35)$.

Ähnlich kann man $(14)(41)(35)(14) = (14)(35)$ rechnen oder man kann auch sehen, dass $(14) = (41) = (14)^{-1}$.

(3) Da die Zahlen in den zwei Klammern verschieden sind, kommutieren die Permutationen $[(132)(45)]^6 = (132)^6(45)^6 = \mathrm{id}$.

(4) Weil $(123)(321) = \mathrm{id}$, gilt $(123)^{-1} = (321) = (132)$. Wir rechnen

$$(123)(41253)(12)(123)^{-1} = (123)(41253)(12)(132) = (1425)$$

und

$$(42351)(23) = (1425).$$

Wir bemerken, dass der Ausdruck von der Form $s(41253)(12)s^{-1}$ für $s = (123)$ ist. Auf der linken Seite steht ein ähnlicher Ausdruck, aber die Zahlen sind genau mit der Permutation (123) vertauscht: Die sogenannte Konjugations-Abbildung $\sigma \mapsto (123)\sigma(123)^{-1}$ permutiert in σ genau die Einträge $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$.

$$\begin{array}{c} (123)(41253)(12)(123)^{-1} \\ \downarrow\downarrow\ \downarrow\quad \downarrow\downarrow \\ (42351)(23) \end{array}$$

Formal könnte man das aufschreiben als

$$s(abcde)(xy)s^{-1} = (s(a)s(b)s(c)s(d)s(e))(s(x)s(y)).$$

Aufgabe 5

(1) Zeige, dass die symmetrische Gruppe S_4 von den Transpositionen $(12), (23), (34)$ erzeugt wird.

(2) Finde eine normale Untergruppe H von S_4 der Ordnung 4. “Normal” heisst, dass $gHg^{-1} = H$ für alle $g \in S_4$. *Tip: Verwende (1) und Aufgabe 4(4).*

Lösung:

(1) Jede Vertauschung von vier Objekten kann erreicht werden indem man zwei nebeneinanderliegende Objekte vertauscht. Deshalb gilt $\langle(12),(23),(34)\rangle = S_4$.

(2) Wir betrachten die Untergruppe $H = \langle(12)(34),(13)(24),(14)(23)\rangle$. Da $[(12)(34)]^2 = \mathrm{id}_{S_4} = [(13)(24)]^2 = [(14)(23)]^2$ besteht die erzeugte Untergruppe genau aus den vier Elementen $H = \{\mathrm{id}_{S_4},(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$.

H ist eine normale Untergruppe von G falls $\forall g \in G\colon gHg^{-1} = H$ gilt. Da S_4 von den Elementen in $S = \{(12),(23),(34)\}$ erzeugt wird, reicht es zu sehen dass $sHs^{-1} = H$ für $s \in S$. (Falls $g = s_1 s_2 \cdots s_k$, dann ist $gHg^{-1} = s_1 \cdots s_k H s_k^{-1} \cdots s_1^{-1} = s_1 \cdots s_{k-1} H s_{k-1}^{-1} \cdots s_1^{-1} = \ldots = s_1 H s_1^{-1} = H$). Mit Aufgabe 4(4) sehen wir, dass die Konjugationen $(12),(23)$ und (34) keinen Effekt auf die Elemente in $H = \{\mathrm{id}_{S_4},(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ haben, also gilt $\forall s \in S, h \in H\colon shs^{-1} = h$ and thus $sHs^{-1} = H$. Somit ist H eine normale Untergruppe von S_4. Statt Aufgabe 4(4) zu verwenden kann man das auch durch nachrechnen überprüfen (das sind aber $4 \times 4 = 16$ Rechnungen).