Lösung Serie 6

Aufgabe 1

Das Tetraeder hat drei Konjugationsklassen von Untergruppen der Ordnung 4. Markiere je einen Tetraeder so, dass die Symmetriegruppen zu den Untergruppen der Ordnung 4 reduziert werden.

Tip: Siehe Fig. 36.1 im Skript.

Lösung:
Es gibt viele Lösungen. Eine Art wie man gezielt solche Markierungen finden kann ist mittels Fundamentalregionen:

Sei $G = \mathrm{Sym}(T)$. Eine Fundamentalregion $F \subset T$ des Tetraeders T ist eine Menge mit den Eigenschaften

(1) Der Abschluss von $G(F) = \{g(p)\colon g \in G, p \in F\}$ ist das ganze Tetraeder: $\overline{G(F)} = T$

(2) $\forall g \in G \setminus \{\mathrm{id}\}\colon g(F) \cap F = \emptyset$

Wenn man eine Fundamentalregion gefunden hat, sie und ihr Bild unter der Untergruppe markieren. Diese Markierung wird dann von der Untergruppe erhalten, aber wegen Eigenschaft (2) gibt es keine anderen Elemente in $\mathrm{Sym}(T)$, die die Markierung erhalten. für den Tetraeder gibt es ein Dreieck, das eine Fundamentalregion ist. Damit bekommt man Markierungen für die drei Untergruppen mit 4 Elementen, wie in Abb. 1. Mit blau sind die Rotationsachsen und Spiegelungsebenen angedeutet.

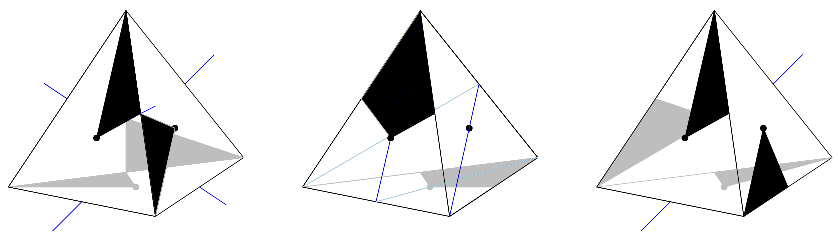

Abbildung 1: Links: Markierung für Gruppe die von drei Geradenspiegelungen generiert wird. Mitte: Markierung für Gruppe die von zwei Ebenenspiegelungen generiert wird. Rechts: Markierung für Gruppe die von einer Rotoreflektion generiert wird.

Aufgabe 2

Im folgenden Würfel sehen wir nicht, wie der Würfel auf der Hinterseite aussieht. Was ist die maximal mögliche Grösse der Symmetriegruppe dieses markierten Würfels?

Lösung:
Wir bemerken, dass der sichtbare Teil keine Symmetrien hat (ausser der Identität), nur die Identität sendet also die drei sichtbaren Flächen wieder zu den sichtbaren Flächen. Falls es eine weitere Symmetrie g gibt, muss g also mindestens eine sichtbare Fläche zu einer hinteren Fläche senden.

Wir bemerken, dass der vorderste Eckpunkt p direkt neben zwei E's und neben einem H ist. Also muss $g(p)$ ebenfalls direkt neben zwei E's und einem H sein. Für die 6 sichtbaren Rand-Eckpunkte kommt nur der Punkt q (mitte links) in Frage.

Fall 1: Es gibt eine Symmetrie g, mit $g(p) = q$. In diesem Fall ist g eine Geradenspiegelung an einer Achse, wie in Abb. 2 dargestellt. Mit dem Satz über affin unabhängige Punktmengen (mit zwei weiteren Punkten auf dem Logo), kann man beweisen, dass diese Geradenspiegelung die einzige Symmetrie ist, die p auf q sendet.

Es hat immer noch zwei verdeckte Seiten. Kann man diese so markieren, dass es noch weitere Symmetrien gibt? Der einzige weitere Punkt auf den p gesendet werden könnte ist der hintere Punkt $-p$. Aber da es ein E bei q haben muss, hat es keinen Buchstaben bei $-p$. Also gibt es keine Symmetrie, die p auf $-p$ sendet. Wir haben also die Symmetriegruppe $\{\mathrm{id}, g\}$.

Fall 2: Keine Symmetrie g erfüllt $g(p) = q$. Dann gibt es nur noch die Option $g(p) = -p$. In diesem Fall werden die drei sichtbaren Flächen auf die drei hinteren Flächen gesendet. Es gibt 6 Symmetrien des (unmarkierten) Würfels, die die sichtbaren Flächen auf die hinteren Flächen abbilden (das kann man mit dem Satz über affine Punktmengen beweisen). Jede dieser Symmetrien bildet die Markierung unterschiedlich auf die hinteren drei Flächen ab. Somit gibt es für jede Markierung des Würfels nur eine Symmetrie, nämlich g. Wir haben also die Symmetriegruppe $\{\mathrm{id}, g\}$.

Zusammenfassend haben wir herausgefunden, dass es Markierungen für sieben nichttriviale Symmetrien gibt. Aber in all diesen sieben Fällen gibt es nur eine nicht-triviale Symmetrie. Die maximale Ordnung einer Symmetriegruppe, die die Markierung erhält ist also 2.

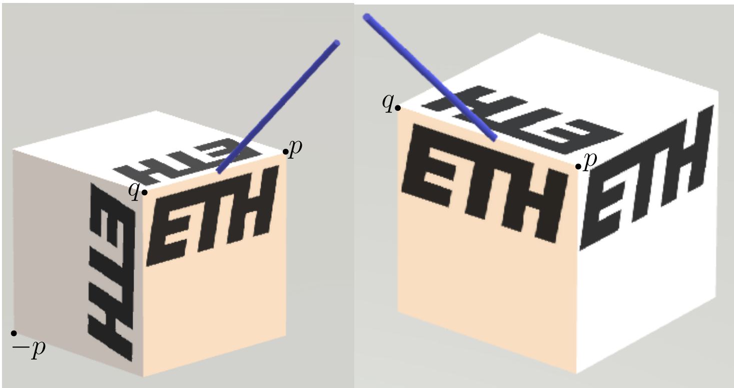

Abbildung 2: Links: Neue Ansicht mit zusätzlichem ETH-Logo. Rechts: Ursprüngliche Ansicht mit Spiegelungsachse.

Aufgabe 3

Wievele Untergruppen der Ordnung 5 kannst du in der Symmetriegruppe des Dodekaeders $\mathrm{Sym}(D)$ finden? Sind sie alle konjugiert?

Tip: Wenn du möchtest, kannst du ohne Beweis annehmen, dass Gruppen der Ordnung 5 von einem Element erzeugt werden.

Lösung:

Wir bemerken zuerst, dass jede Gruppe G der Ordnung 5 von jedem Element in $G \setminus \{\mathrm{id}\}$ erzeugt wird: Angenommen es gibt ein Element $g \in G$, das noch nicht die ganze Gruppe erzeugt $\langle g \rangle \neq G$, dann ist $\langle g \rangle$ eine Untergruppe von G. Untergruppen Teilen die Ordnung der Gruppe und da 5 eine Primzahl ist, muss $\langle g \rangle = \{\mathrm{id}\}$, also $g = \mathrm{id}$. Insbesondere haben alle Elemente in $G \setminus \{\mathrm{id}\}$ Ordnung 5.

Sei jetzt also $G < \mathrm{Sym}(D)$ eine Untergruppe der Ordnung 5. Wir machen eine Fallunterscheidung indem wir betrachten, was mit einer Fläche des Dodekaeders passiert.

Fall 1: Es gibt eine Fläche, die von G erhalten bleibt. Da die Aktion von G schon vollständig durch die Aktion auf der Fläche bestimmt ist (Satz über 4 affin unabhängige Punkte im $\mathbb{R}^3$), kann G als Untergruppe von der Symmetriegruppe des regelmässigen 5-Ecks $\mathrm{Sym}(D_5)$ betrachtet werden. Diese besteht aus Rotationen und Spiegelungen. G kann keine Spiegelungen enthalten, da diese Ordnung 2 haben. Also ist G gerade die Gruppe der Rotationen des 5-Ecks.

Wenn eine Fläche fix gehalten wird, dann wird auch die gegenüberliegende Fläche fix gehalten. Im Dodekaeder gibt es 6 Flächenpaare, also gibt es 6 Untergruppen der Ordnung 5, die eine Fläche erhalten. Diese sind alle konjugiert durch ein Element, dass die Fixfläche der einen Untergruppe auf die Fixfläche der anderen Untergruppe abbildet.

Fall 2: Keine Fläche wird fixiert. Wir schreiben $G = \langle g \rangle$ und betrachten, was g auf der Menge der Flächen macht. Sei F ein Fläche. Dann ist gF

eine andere Fläche und somit sind auch g^2F, g^3F und g^4F unterschiedliche Flächen. Wir bemerken, dass für jede Fläche $GF = \{gF : g \in G\}$ jeweils 5 Flächen enthält. Das Dodekaeder hat aber 12 Flächen und man kann nicht 12 Objekte in jeweils Gruppen von 5 aufteilen. Also gibt es keine Untergruppe von $\mathrm{Sym}(D)$, die keine Fläche fixiert.

Aufgabe 4

Zeige, dass $G \to \mathrm{Aut}(G), g \mapsto c_g$ ein Homomorphismus ist, wobei c_g die Konjugation bezeichnet.

Lösung:
Wir definieren $\varphi(g) = c_g$ und müssen zeigen, dass $\varphi\colon G \to \mathrm{Aut}(G)$ ein Homomorphismus ist. Wir müssen zeigen, dass $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$ für alle $g, h \in G$. Zwei Elemente in $\mathrm{Aut}(G)$ sind genau dann gleich, wenn sie für alle Inputs gleich sind. Sei also $a \in G$.

$$\begin{aligned}\varphi(gh)(a) &= c_{gh}(a) = gha(gh)^{-1} = ghah^{-1}g^{-1} = gc_h(a)g^{-1} \\ &= c_g(c_h(a)) = (c_g \circ c_h)(a) = (\varphi(g) \circ \varphi(h))(a)\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Wir betrachten die Untergruppen $C_n, D_n < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$, die den Ursprung fixieren.

(a) Finde einen äusseren Automorphismus von C_4.

(b) Finde einen äusseren Automorphismus von C_5, der nicht durch Konjugation in $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ realisiert werden kann.

(c) Finde einen äusseren Automorphismus von D_4, der auf C_4 die Identität ist.

Lösung:

(a) $C_4 = \{\mathrm{id}, r, r^2, r^3\}$. Die Funktion

$$\begin{aligned}\varphi\colon C_4 &\to C_4 \\ \mathrm{id} &\mapsto \mathrm{id} \\ r &\mapsto r^3 \\ r^2 &\mapsto r^2 \\ r^3 &\mapsto r \\ r^k &\mapsto r^{4-k}\end{aligned}$$

ist eine Bijektion. Wir müssen noch zeigen, dass φ ein Homomorphismus ist. In der Tat: $\varphi(r^k r^l) = \varphi(r^(k+l)) = r^{4-k-l} = \mathrm{id}\, r^{4-k-l} = r^4 r^{4-k-l} = r^{4-k+4-l} = r^{4-k} r^{4-l} = \varphi(r^k)\varphi(r^l)$. Somit ist φ ein Automorphismus von C_4. Da C_4 abelsch (kommutativ ist), ist jede Konjugation $r^k \mapsto g r^k g^{-1}$ die Identität. Der einzige innere Automorphismus ist also $\mathrm{id}_{\mathrm{Aut}(C_4)} \colon C_4 \to C_4$. Da $\varphi \colon C_4 \to C_4$ nicht die Identität ist, ist φ nicht ein innerer Automorphismus, also ist φ ein äusserer Automorphismus.

Wir bemerken, dass $\varphi = c_s$, wobei c_s die Konjugation mit der Punktspiegelung $s \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ ist. Also kann φ zwar nicht durch Konjugation eines Elements in C_4 realisiert werden, aber trotzdem durch Konjugation eines Elements in $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$.

(b) Wir betrachten $\psi \colon C_5 \to C_5, r^k \mapsto r^{2k}$. Da 5 ungerade ist, handelt es sich dabei um eine Bijektion. Aus $\psi(r^k r^l) = \psi(r^{k+l}) = r^{2(k+l)} = r^{2k+2l} = r^{2k} r^{2l} = \psi(r^k)\psi(r^l)$ folgt, dass ψ auch ein Homomorphismus ist. Also ist ψ ein Automorphismus. Da C_5 abelsch ist, sind Konjugationen trivial, also ist ψ keine Konjugation und somit ein äusserer Automorphismus.

Wenn r die Rotation um $2\pi/5$ beschreibt, dann ist für jedes $g \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ auch $c_g(r) = grg^{-1}$ eine Rotation um den Winkel $2\pi/5$ (vielleicht ist der Drehmittelpunkt und die Drehrichtung anders). Da aber $\psi(r) = r^2$ eine Drehung um $2 \cdot 2\pi/5$ ist, kann ψ keine Konjugation c_g sein.

(c) Sei r die Rotation um den Winkel $2\pi/4$ und s eine Spiegelung. Dann ist $D_4 = \{\mathrm{id}, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Durch betrachten von Abb. **??** kann man sich davon überzeugen. Ausserdem bemerkt man, dass $rs = sr^{-1}$ gilt. Um das rigoros zu beweisen kann man den Satz verwenden, dass drei affin unabhängige Punkte eine Isometrie im $\mathbb{R}^2$ bestimmen. Dann reicht es wenn man die Aussage $rs = sr^{-1}$ für den Mittelpunkt und zwei Punkte auf dem 4-Eck überprüft.

Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \vartheta \colon D_4 &\to D_4 \\ r^k &\mapsto r^k \\ sr^k &\mapsto sr^{k-1} \end{aligned}$$

und bemerken, dass ϑ eine Bijektion ist. Wir müssen zeigen, dass ϑ ein Homomorphismus ist. Wir unterscheiden vier Fälle und verwenden $r^k s = sr^{-k}$:

Fall 1: $\vartheta(r^k r^l) = \vartheta(r^{k+l}) = r^{k+l} = \vartheta(r^k)\vartheta(r^l)$.

Fall 2: $\vartheta(r^k s r^l) = \vartheta(sr^{-k} r^l) = \vartheta(sr^{l-k}) = sr^{l-k-1} = sr^{-k} r^{l-1} = r^k s r^{l-1} = \vartheta(r^k)\vartheta(sr^l)$

Fall 3: $\vartheta(sr^k r^l) = \vartheta(sr^{k-l}) = sr^{k+l-1} = sr^{k-1} r^l = \vartheta(sr^k)\vartheta(r^l)$

Fall 4: $\vartheta(sr^k s r^l) = \vartheta(ssr^{-k} r^l) = \vartheta(r^{l-k}) = r^{l-k+1-1} = ssr^{-(k-1)} r^{l-1} = sr^{k-1} s r^{l-1} = \vartheta(sr^k)\vartheta(sr^l)$.

Somit ist ϑ ein Automorphismus. Wir müssen noch zeigen, dass ϑ nicht durch Konjugation gegeben ist. Die Frage ist, ob ein $g \in D_4$ existiert, so dass $gdg^{-1} = \vartheta(d)\ \forall d \in D_4$.

Falls g eine Spiegelung $g = sr^k$ ist, dann haben wir $grg^{-1} = sr^k r(sr^k)^{-1} = sr^k rr^{-k}s^{-1} = srs = ssr^{-1} = r^{-1}$.. Weil $n \geq 3$, gilt $r^{-1} \neq r$, also $grg^{-1} \neq \vartheta r$. ϑ is also keine Konjugation durch eine Spiegelung.

Falls g eine Rotation $g = r^k$ ist, dann haben wir $gsg^{-1} = r^k s(r^k)^{-1} = sr^{-k}r^{-k} = sr^{-2k}$. Da $\vartheta(s) = sr^{-1}$, handelt es sich um eine Konjugation genau dann wenn $r^{2k} = r^1$ ist. Weder r^2 noch $r^4 = \mathrm{id}$ sind gleich r, also gibt es kein solches k. Somit ist ϑ ein äusserere Automorphismus.

Bemerkung: Für gerade n, gibt es einen solchen äusseren Automorphismus, aber nicht für ungerade n.

Durch Konstruktion ist ϑ_{C_4} die Identität.

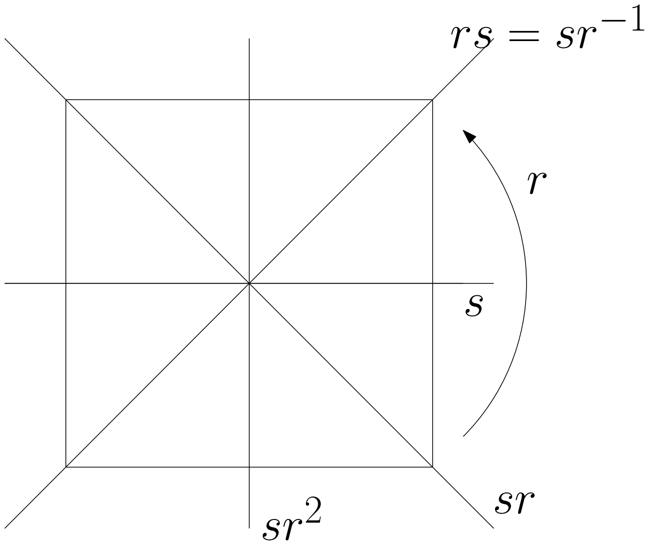

Abbildung 3: Illustration der Elemente in D_4.

Aufgabe 6

Wie viele Elemente von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ der Ordnung m, die nicht konjugiert sind, findest du für jedes $m \geq 2$ (ohne Beweis)?

Lösung:
Aus Kapitel 12, "Naming rigid motions", folgt die folgende Auflistung:

$m = 2$: Es gibt genau die folgenden 3 Konjugationsklassen: Rotation um 180° an Achse. Punktinversion. Reflektion an Ebene.

Für m ungerade: Es gibt nur Rotationen um den Winkel $360° \cdot k/m$. Wenn k und m koprim sind (grösster gemeinsamer Teiler = 1), dann ist die Ordnung m, sonst ist sie kleiner. Also haben wir zum Beispiel m Rotationen der Ordnung m, wenn m eine Primzahl ist, sonst aber weniger. Alle diese Rotationen sind nicht konjugiert zueinander.

m gerade: Es gibt die selben Rotationen um Winkel $360° \cdot k/m$ wobei m und k koprim sind. Zusätzlich gibt es für jede solche Rotation noch Rotoreflektionen, die alle konjugiert zueinander sind. Zum Beispiel gibt es für $m = 4$ zwei Konjugationsklassen von Rotationen und zwei Konjugationsklassen von Rotoreflektionen