Ferienserie

Aufgabe 1

Zeige, dass eine Gruppe mit Primzahlordnung zyklisch ist.

Lösung:

Let G be a group with prime order p. Let $g \in G$ be a non-identity element. Then $(G : \langle g \rangle) = 1$ by Lagrange's theorem. Therefore $G = \langle g \rangle$ and G is cyclic.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Untergruppen der Diedergruppe D_n.

Lösung:

Denote rotation by r and reflection by t, i.e. $D_n = \langle r, t \rangle$. Then the subgroups are $\langle r^k \rangle$ with $k|n$ and $\langle r^k, r^l t \rangle$ with $k|n$ and $0 \leq l < k$.

Proof left as an exercise.

Aufgabe 3

Finde einen surjektiven Homomorphism von der Einheitsquaternionen-Gruppe $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ zur Kleinschen Vierergruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Lösung:

The center of the group $H = \langle -1 \rangle$ is normal. The canonical homomorphism $\varphi : Q_8 \to Q_8/H$ is the desired map.

Proof left as an exercise.

Aufgabe 4

Zeige, dass jeder Automorphismus der additiven Gruppe $\mathbb{Z}_n$ durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl gegeben ist.

Lösung:

Let g be an element of $\mathbb{Z}_n$ and f_k be an automorphism such that $f_k([1]) = [k]$. Then $f_k([g]) = f_k(\underbrace{[1] + \cdots + [1]}_{g \text{ times}}) = f_k([1])g = [kg]$.

Aufgabe 5

Wieviele Automorphismen hat die Gruppe $\mathbb{Z}_4$? $\mathbb{Z}_5$? $\mathbb{Z}_{28}$?

Lösung:

We solve the general case. Note that f_k in Aufgabe 4 is an automorphism if and only if $gcd(k, n) = 1$. It follows that $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n, +) \cong (\mathbb{Z}_n, \times)$ and therefore $|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n, +)| = U(n)$.

Aufgabe 6

Finde eine Gruppe G und einen Teiler $k > 0$ von $\#G$, sodass G keine Untergruppe der Ordnung k hat.

Lösung:

Alternating group A_4 of order 12 has no subgroup of order 6.

Proof left as an exercise. Hint: you can either list all subgroups or prove by contradiction with 3-cycles.

Aufgabe 7

Sei $A \leq B \leq C$. Finde ein Beispiel mit A normal in B und B normal in C, aber A nicht normal in C. *Hint: Figur 36.1. im Skript.*

Lösung:
Let $G = \langle(12)(34)\rangle$, $H = \{(), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Note that $G \lhd H$ and $H \lhd S_4$ but G is not normal in S_4.

Aufgabe 8

Sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

(a) Ist das Bild einer normalen Untergruppe zwingend normal? Was kann schief gehen?

(b) Was passiert, wenn f surjektiv ist?

Lösung:

(a) No. Consider the example above and the inclusion map $f : H \to S_4$. Apparently, G is normal in H but $f(G) = G$ is not normal in S_4.

(b) Normal subgroups are mapped to normal subgroups. Let G, H, N be groups with $N \lhd G$ and $\varphi : G \to H$ be a surjective mapping. Let h be an element of H. Then there exists $g \in G$ such that

$$h\varphi(N)h^{-1} = \varphi(g)\varphi(N)\varphi(g^{-1}) = \varphi(gNg^{-1}) = \varphi(N).$$

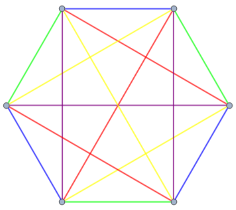
Hence $\varphi(N)$ is normal.

Aufgabe 9

Wieso kann man mit regelmässigen 6-Ecken keinen platonischen Körper bilden?

Aufgabe 10

Was ist die (farbtreue) Symmetriegruppe der folgenden markierten Figur?



Aufgabe 11

Sei $R_\theta(X)$ die Rotation um der x-Achse X um den Winkel θ, $0 < \theta < 2\pi$. Seien $p, q \in X$ Punkte mit Abstand 1. Seien s_p, s_q die Punktspiegelungen an p, q.

(a) Zeige, dass
$$s_p \circ R_\theta(A) \circ s_q$$
eine Schraubbewegung S um die Achse X ist.

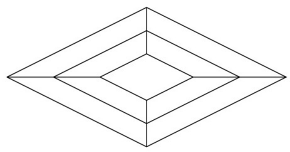
(b) Finde den Abstand t, um den S die Achse A verschiebt.

Aufgabe 12

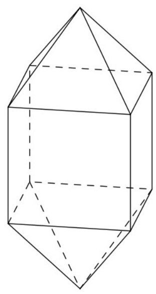
Geben Sie ohne Begründung die Ordnungen der Symmetriegruppen der folgenden Figuren an. Die gestrichelten Kanten sind nur zur besseren Lesbarkeit gestrichelt.

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \text{ und } 0 \leq y \leq 1\}$

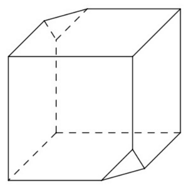
(b) In $\mathbb{R}^2$:



(c) In $\mathbb{R}^3$, alle Kanten haben die gleiche Länge:



(d) Die Figur in $\mathbb{R}^3$ entsteht aus dem Würfel durch Abschneiden entlang zweier kongruenter, gleichseitiger Dreiecke, die orthogonal zur Raumdiagonale des Würfels stehen:



Aufgabe 13

Markiere einen WÃ$\frac{1}{4}$rfel oder Oktaeder (oder Tetraeder) um die Symmetriegruppen zu einigen der Untergruppen in Figur 36.1 (Skript) zu reduzieren. (Wähle einige, die dich am meisten interessieren.)

Aufgabe 14

Wieso erhalten wir nicht

$$\mathrm{Sym}(T) = \mathrm{Sym}_+(T) \times \{\pm I\}$$

mit dem gleichen Beweis wie bei

$$\mathrm{Sym}(W) = \mathrm{Sym}_+(W) \times \{\pm I\} \ \ ?$$

For fun

Aufgabe 15(∗)

Sei G eine endliche Gruppe mit $\#G > 2$. Zeige, dass $\mathrm{Aut}(G)$ nicht trivial ist.

Lösung:

If G is non-abelian then the conjugation by a non-center element is a non-trivial automorphism.

If G is abelian and there exists an element of order > 2 then the mapping $f : g \to -g$ is a non-trivial automorphism.

If all non-trivial elements have order 2, then $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$. Any permutation of the basis is a non-trivial automorphism. This finishes the proof.

More fun: what about infinite group?

Aufgabe 16($*$)

Finde einen Äusseren Automorphismus von $\mathrm{Sym}(W)$.