Lösungen

Aufgabe 1 [4 Punkte]

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen *ohne Begründung* an, ob Sie wahr oder falsch ist:

(1) Die alternierende Gruppe A_4 besitzt keine normalen Untergruppen ausser $\{1\}$ und A_4 selber.

(2) Sei G eine Gruppe und seien $H_1, H_2 \trianglelefteq G$ normale Untergruppen von G. Dann ist die von deren Vereinigung erzeugte Untergruppe $\langle H_1 \cup H_2 \rangle$ wieder normal in G.

(3) Sind $F_1 \subseteq F_2$ Figuren in $\mathbb{R}^2$, so ist $\mathrm{Sym}(F_1) \subseteq \mathrm{Sym}(F_2)$.

(4) Das reguläre Dodekaeders hat 31 Drehachsen.

Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede unbeantwortete Frage gibt 0 Punkte, jede falsche Antwort gibt -1 Punkt. Die Minimalpunktzahl für diese Aufgabe beträgt 0 Punkte.

Lösung

(1) Falsch. Die Untergruppe $H \coloneqq \{(), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ ist normal.

(2) Wahr. Sei $g \in G$ und $h = h_1 \cdots h_n$ in $\langle H_1 \cup H_2 \rangle$ ($h_i \in H_1 \cup H_2$ für alle $i = 1, \dots, n$). Dann

$$ghg^{-1} = gh_1 \cdots h_n g^{-1} = gh_1 g^{-1} gh_2 g^{-1} \cdots gh_n g^{-1}.$$

Als H_1 und H_2 normal sind, gehört $gh_i g^{-1}$ wider zu $H_1 \cup H_2$ für alle $i = 1, \dots, n$, so $ghg^{-1} \in \langle H_1 \cup H_2 \rangle$.

(3) Falsch. Seien $F_1 = (1,1)$ und F_2 ein Quadrat um $(0,0)$. Dann ist jede Drehung um $(1,1)$ eine Symmetrie von F_1 aber nur die $0°$-Drehung um $(1,1)$ ist eine Symmetrie von F_2.

(4) Wahr. Die Drehachsen verlaufen durch gegenüberliegende Facetten, gegenüberliegende Ecken und gegenüberliegende Kanten. Ein reguläres Dodekaeder hat 12 Facetten, 20 Ecken und 30 Kanten, also

$$\frac{12}{2} + \frac{20}{2} + \frac{30}{2} = 31$$

Dreachsen.

Aufgabe 2 [4 Punkte]

Beweisen oder widerlegen Sie:

(1) Sei $n \geq 2$ und G eine Gruppe mit genau einem Element g der Ordnung n. Dann ist $n = 2$ und g liegt im Zentrum von G.

(2) Sei G eine Gruppe, $x, y \in G$. Dann haben xy und yx immer die gleiche Ordnung.

Lösung

(1) Sei $g \in G$ der Ordnung n, dann hat auch g^{-1} Ordnung n. Also $g = g^{-1}$ und $g^2 = e$. Sei $h \in G$ beliebig, dann hat hgh^{-1} auch Ordnung 2:

$$(hgh^{-1})^2 = hgh^{-1}hgh^{-1} = hg^2h^{-1} = e.$$

Also $hgh^{-1} = g$ und so liegt g im Zentrum von G.

(2) Wahr. xy und yx sind konjugiert:

$$y \cdot (xy) \cdot y^{-1} = yx.$$

Aufgabe 3 [6 Punkte]

Betrachten Sie die Symmetrische Gruppe $S_3 = \{(), (123), (132), (12), (13), (23)\}$.

(1) Finden Sie einen Isomorphismus zwischen $\mathrm{Aut}(S_3)$ und einer aus der Vorlesung bekannten Gruppe.

(2) Beweisen Sie, dass S_3 keine äusseren Automorphismen besitzt.

Lösung

(1) Wir bemerken zuerst, dass $S_3 = \langle (12), (123) \rangle$:

$$\begin{aligned} (123)(123) &= (132), \\ (12)(123) &= (23) \\ (12)(123)(123) &= (23)(123) = (13). \end{aligned}$$

Wir behaupten, dass die Konjugationsabbildung $C\colon S_3 \longrightarrow \mathrm{Aut}(S_3)$, $g \longmapsto C_g$ ein Isomorphismus ist. Es folgt aus Serie 4 Aufgabe 2, dass C ein Homomorphismus ist. Wir überprüfen die Injektivität von C auf die erzeugenden Elemente (12) und (123) von S_3.

$$\begin{aligned} C_{(12)}\big((12)\big) &= (12)(12)(12) = (12), \\ C_{(13)}\big((12)\big) &= (13)(12)(13) = (23), \\ C_{(23)}\big((12)\big) &= (23)(12)(23) = (13). \end{aligned}$$

Also sind die Konjugationen $C_{(12)}, C_{(13)}, C_{(23)}$ paarweise verschieden. Zudem gilt es

$$\begin{aligned} C_{(123)}\big((12)\big) &= (123)(12)(321) = (23), \\ C_{(132)}\big((12)\big) &= (132)(12)(231) = (13). \end{aligned}$$

Also sind $C_{(123)}$ und $C_{(132)}$ zueinander verschieden. Es bleibt noch zu zeigen, dass $C_{(123)} \neq C_{(13)}$ und $C_{(132)} \neq C_{(23)}$:

$$\begin{aligned} C_{(123)}\big((123)\big) &= (123)(123)(321) = (123), \\ C_{(13)}\big((123)\big) &= (13)(123)(13) = (132), \\ C_{(132)}\big((123)\big) &= (132)(123)(231) = (123), \\ C_{(23)}\big((123)\big) &= (23)(123)(23) = (132). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Abbildung $C\colon S_3 \longrightarrow \mathrm{Aut}(S_3)$ injektiv ist.

Jeder Isomorphismus $\varphi\colon S_3 \longrightarrow S_3$ permutiert die drei Permutationen $(12), (23), (13)$, also gibt es höchstens sechs automorphismen von S_3. (Alternativ: Jeder Isomorphismus φ ist ordnungserhaltend und durch $\varphi\big((12)\big)$ und $\varphi\big((123)\big)$ bestimmt; es gibt drei Elemente der Ordnung 2 und zwei Elemente der Ordnung 3.) So ist die Abbilsung C ein Gruppenisomorphismus.

(2) Es folgt direkt aus Teilaufgabe (1), dass alle Automorphismen von S_3 via Konjugation gegeben sind. Also sind alle Automorphismen innere Automorphismen und es gibt keine äussere Automorphismen.

Aufgabe 4 [4 Punkte]

Man betrachtet die Symmetriegruppen der folgenden Friese in $\mathbb{R}^2$:

(a) $\cdots$ RRRRRRRRR $\cdots$

(b) $\cdots$ RᴚRᴚRᴚRᴚR $\cdots$

(c) $\cdots$ DDDDDDDDD $\cdots$

Die Aufgabe:

(1) Bestimmen Sie die drei Symmetriegruppen. Welche sind isomorph?

(2) Welche sind konjugiert (in $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$)?

Begründen Sie ihre Antworten.

Lösung

Seien F_1, F_2 und F_3 die drei Friesen.

(1) Nach Hilfssatz Z ist jede Symmetrie der Friesen F_1 und F_2 durch das Bild eines fixierten R $=: R_0 \subset F_i$ bestimmt, denn das Bild muss noch ein "R" sein. In F_1 kann man jede andere "R" durch eine Translation von R_0 nach links oder nach rechts um eine ganzzahlige Abstand erreichen: nach Hilfssatz Z diese ist eine vollständige Beschreibung aller Isometrien von F_1. So
$$\mathrm{Sym}(F_1) = \{T_{(k,0)}\colon k \in \mathbb{Z}\} = \langle T_{(1,0)} \rangle \cong \mathbb{Z},$$
wobei $T_{(x,y)}$ eine Translation um den Vektor (x, y) bezeichnet.

In F_2 man kann jede andere "R" entweder durch eine Translation $T_{(2k,0)}$ von R_0 nach links oder nach rechts um eine ganzzahlige gerade Abstand, oder durch eine Gleitspiegelung der Form $L_{2k+1}\colon (x, y) \mapsto (x+2k+1, -y)$, $k \in \mathbb{Z}$, erreichen. Nach Hilfssatz Z diese sind alle mögliche Symmetrien von F_2. Sei $L := L_0$ die Gleitspiegelung $(x, y) \mapsto (x + 1, -1)$, dann erzeugt S alle gerade ganzzahlige Translationen und alle Gleitspiegelungen:
$$\mathrm{Sym}(F_2) = \{T_{(2k,0)}\colon k \in \mathbb{Z}\} \cup \{L_{2k+1}\colon k \in \mathbb{Z}\} = \langle L \rangle \cong \mathbb{Z},$$
Dies zeigt, dass die zwei Friesgruppen $\mathrm{Sym}(F_1)$ und $\mathrm{Sym}(F_2)$ isomorph sind.

Nach Hilfssatz Z ist jede Symmetrie des Frieses F_3 durch das Bild eines fixierten D $=: D_0 \subset F_3$. Man kann jede andere "D" durch eine ganzzahlige Translation $T_{(k,0)}$ nach links oder nach rechts zusammen mit einer Spiegelung $S\colon (x,y) \mapsto (x,-y)$ an die horizonate Achse erhalten. Nach Hilfssatz Z diese sind alle mögliche Symmetrien von F_3. Wir bemerken, dass $T_{(k,0)}$ und S kommutieren, also:

$$\mathrm{Sym}(F_3) = \{T_{(k,0)} \colon k \in \mathbb{Z}\} \cup \{S \circ T_{(k,0)} \colon k \in \mathbb{Z}\} = \langle T_{(1,0)}, S\rangle \cong \mathbb{Z} \times C_2,$$

Wir behaupten, dass es keinen Isomorphismus zwischen $\mathbb{Z} \times C_2$ und $\mathbb{Z}$ existiert. Sei $\varphi\colon \mathbb{Z} \times C_2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus. Dann $\ker(\varphi) = \{(0,\overline{0})\}$ aber

$$0 = \varphi\big((0,\overline{0})\big) = \varphi\big((0,\overline{1}) + (0,\overline{1})\big) = \varphi\big((0,\overline{1})\big) + \varphi\big((0,\overline{1})\big) = 2\varphi\big((0,\overline{1})\big),$$

also $\varphi\big((0,\overline{1})\big) = 0$ und $(0,\overline{1}) \in \ker(\varphi)$. Widerspruch.

Alternativ: ein Isomorphismus zwichen $\mathrm{Sym}(F_1)$ und $\mathrm{Sym}(F_3)$ impliziert, dass es ein $g \in \mathrm{Sym}(F_3)$ existiert mit $g^k = S$ und $g^l = T_{(1,0)}$. Ein solches Element steht in unserer Liste nicht.

(2) Es folgt aus Teilaufgabe (1), dass $\mathrm{Sym}(F_3)$ nicht zu $\mathrm{Sym}(F_1)$ oder zu $\mathrm{Sym}(F_2)$ konjugiert ist. $\mathrm{Sym}(F_1)$ und $\mathrm{Sym}(F_2)$ sind nicht konjugiert in $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$, denn Konjugation ist immer orientierungserhaltend und $\mathrm{Sym}(F_2)$ enthält auch orientierungsumkehrende Symmetrien.

Aufgabe 5 [6 Punkte]

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^3$ die untenstehende Figur, die aus zwei zusammengeklebten regulären Tetraedern besteht. Die Schnittmenge der beiden Tetraeder ist ein reguläres Sechseck in der horizontalen Ebene, die die beiden Tetraeder trennt.

Fig. 1. Zwei verschiedene Perspektiven

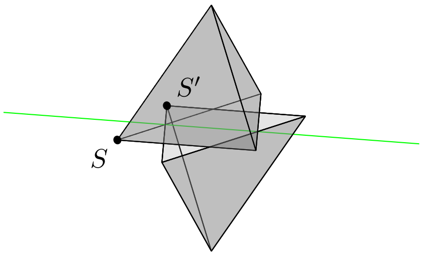
(1) Bestimmen Sie den Orbit sowie den Stabilisator des Punktes S unter der Operation von $\mathrm{Sym}(X)$.

(2) Geben Sie die Ordnung von $\mathrm{Sym}(X)$ an.

(3) Geben Sie alle Elemente von $\mathrm{Sym}(X)$ an.

Lösung

(1) Der Orbit von S besteht aus den sechs Ecken der Tetraedern, die auf der horizontale Ebene liegen: die drei Ecken des oberen Tetraeders sind durch 120°-Drehungen um die vertikale Achse erhalten. Um die Ecken des unteren Tetraeders zu erhalten, benutzen wir die 180°-Drehung um die folgende Achse und dann wieder 120°-Drehungen um die vertikale Achse:

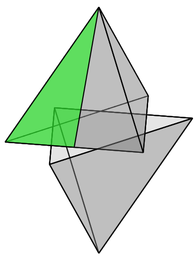


Der Stabilisator besteht aus der Identität und aus der Spiegelung an der Ebene, die durch S, den Schwerpunkt und die obere Ecke verläuft: sei $\phi \neq \mathrm{id}$ eine Symmetrie von X die S erhält. Dann erhält ϕ auch die Gerade L, die durch S und den Schwerpunt O verläuft. Aus Hilfssatz X wissen wir, dass die Fixpunkte von ϕ entweder aus der Gerade L oder aus einer Ebene, die die Gerade L enthält, bestehen.

Falls ϕ nur L erhält, dann schliessen wir aus Hilfssastz C, dass ϕ eine Drehung um L ist. Das ist nicht möglich.

Falls ϕ eine Ebene die L enthält erhält, dann schliessen wir aus Hilfssastz C, dass ϕ eine Spiegelung an dieser Ebene ist: die einzige Ebenenspiegelung die L und X erhält ist die Ebenenspiegelung durch die Ebene, die durch O, S und die obere Ecke verläuft.

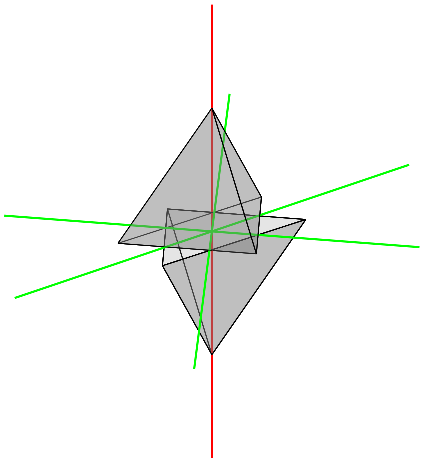
(2) Die Symmetriegruppe besteht aus 12 Elementen: aus Hilfssatz Z ist jede Symmetrie von dem Bild der folgenden Region A auf X bestimmt. Es gibt 12 solche regionen und für jede von diese finden wir eine geignete Symmetrie von X, die A auf diese Region abbildet.



Alternativ: aus Hilfssatz F (Bahnformel) und Teilaufgabe (1)

$$|\mathrm{Sym}(X)| = |\mathrm{Sym}(X) \cdot S| \cdot |\mathrm{Sym}(X)_S| = 6 \cdot 2 = 12.$$

(3) Wir Listen die 12 Symmetrien. Die orientierungserhaltenden Symmetrien von X sind: die Identität, die 120°- und die 240°-Drehung um die rote vertikale Achse, die 180°-Dreungen um die grünen Achsen.



Man erhält die sechs orientierungsumkehrenden Symmetrien mittels Verknüpfung der Orientierungserhaltenden Symmetrien mit der Punktspiegelung um den Schwerpunkt. Konkret die sind: drei Ebenenspiegelungen an den Ebenen, die durch den Schwerpunkt, die obere und eine untere Ecke des oberen Tetraeders verlaufen; drei Drehspiegelungen gegeben durch eine Spiegelung an die horizontale Ebene gefolgt von einer 60°/180°/300°-Drehung um die vertikale Symmetrieachse.