Abschnitt 31 Konjugierte Elemente

Def Sei G eine Gruppe.
Die Elemente $g, h \in G$ sind <u>konjugiert</u> in G, falls es $c \in G$ gibt, mit

$$h = cgc^{-1}.$$

Man schreibt

$$a \sim b \quad \text{oder} \quad a \sim_G b.$$

Aussage Konjugiertheit ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis

$$a = e a e^{-1}$$

$$a = x b x^{-1} \Longrightarrow b = (x^{-1}) a (x^{-1})^{-1}$$

$$a = x b x^{-1} \; \& \; b = y c y^{-1}$$

$$\Longrightarrow a = (xy) c (xy)^{-1}$$

also

$$a \sim a$$

$$a \sim b \Longrightarrow b \sim a$$

$$a \sim b \; \& \; b \sim c \Longrightarrow a \sim c$$

QED

Def Die Äquivalenzklassen der Konjugiertheitsrelation heissen **Konjugationsklassen**.

Bsp $\{e\}$ ist stets eine Konjugationsklasse für sich selbst.

Bsp Eine Gruppe heisst **kommutativ** oder **abelsch**, falls

$$ab = ba \qquad \forall a, b \in G.$$

In einer abelschen Gruppe bildet jedes Element a eine Konjugationsklasse $\{a\}$ für sich selbst.

Bsp Die Konjugationsklassen in D_3 sind

$$\{I\}, \{A, B\}, \{1, 2, 3\}.$$

weil

$$1A1^{-1} = B, \quad 2A2^{-1} = B, \quad 3A3^{-1} = B$$

$$A \sim B$$

und

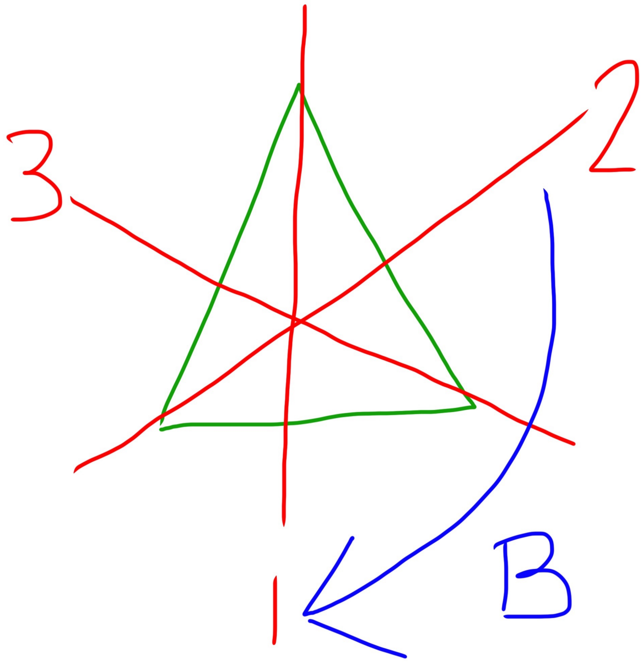
$$B2B^{-1} = 1, \quad B1B^{-1} = 3, \quad B3B^{-1} = 2$$

$$2 \sim 1 \sim 3 \sim 2$$

aber A, B sind <u>nicht</u> zu 1, 2, oder 3 konjugiert.

I A B

1 2 3



B nimmt
2 zu 1

1 ist konjugiert zu 2
durch B

$$\boxed{1 = B\,2\,B^{-1}}$$

Erhaltung von Eigenschaften

<u>Aussage</u> Konjugierte Elemente haben die gleiche Ordnung.

<u>Beweis</u> G eine Gruppe.

$a, b \in G$ konjugiert, d.h.

$$a = cbc^{-1} \qquad \exists c$$

Also

$$a^k = (cbc^{-1})^k = cb\cancel{c^{-1}c}b\cancel{c^{-1}}\ldots$$

$$= c\, b^k\, c^{-1}$$

Also

$$a^k = 1 \iff b^k = 1 \qquad \forall k$$

Also

$$\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(b)$$

QED

Allgemeiner:

Eigentlich teilen konjugierte Elemente all ihren algebraischen Eigenschaften.

Falls es um Isometrien handelt, teilen sie all ihren geometrischen Eigenschaften.

Die Umkehrung der Aussage ist falsch:

<u>Übung</u> Finde so viel Isometrien von $\mathbb{R}^3$ wie möglich, die der gleichen Ordnung sind, aber nicht konjugiert sind.

Wie hängt es von der Ordnung m ab?

Abschnitt 32

Konjugierte Isometrien

Was heisst es zu sagen, das Isometrien oder Untergruppen "gleicher Art" sind?

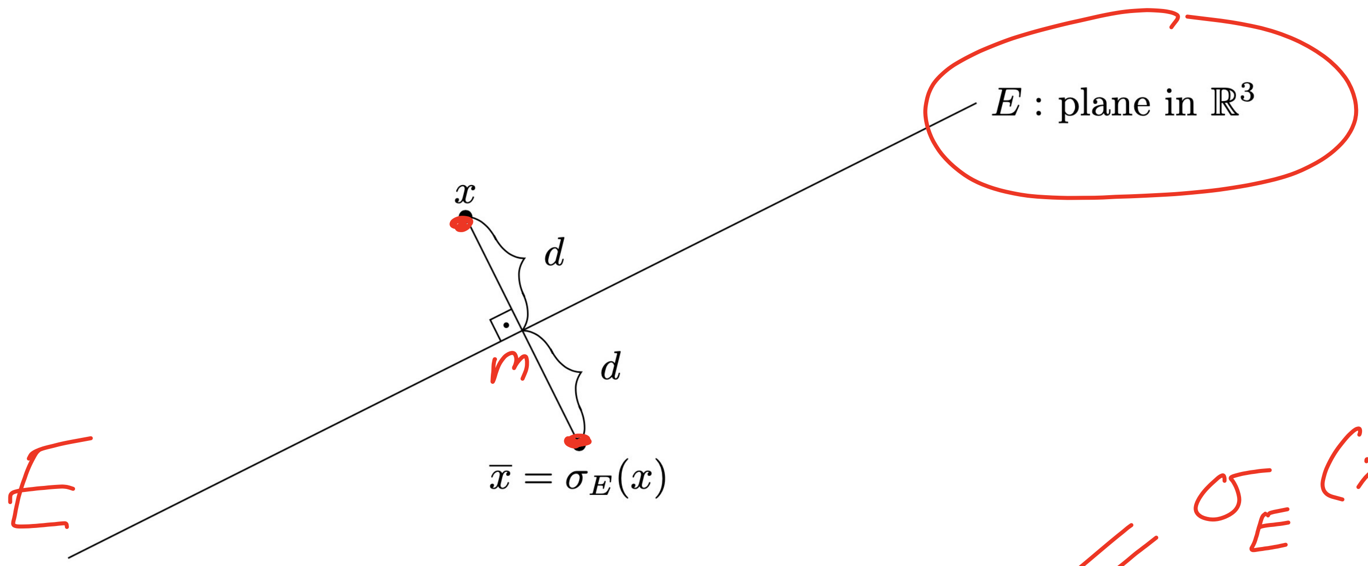
Unsere These:

$$\text{konjugiert} \Rightarrow \text{gleicher Art}$$

Aber nicht notwendiger Weise umgekehrt.

Spiegelungen

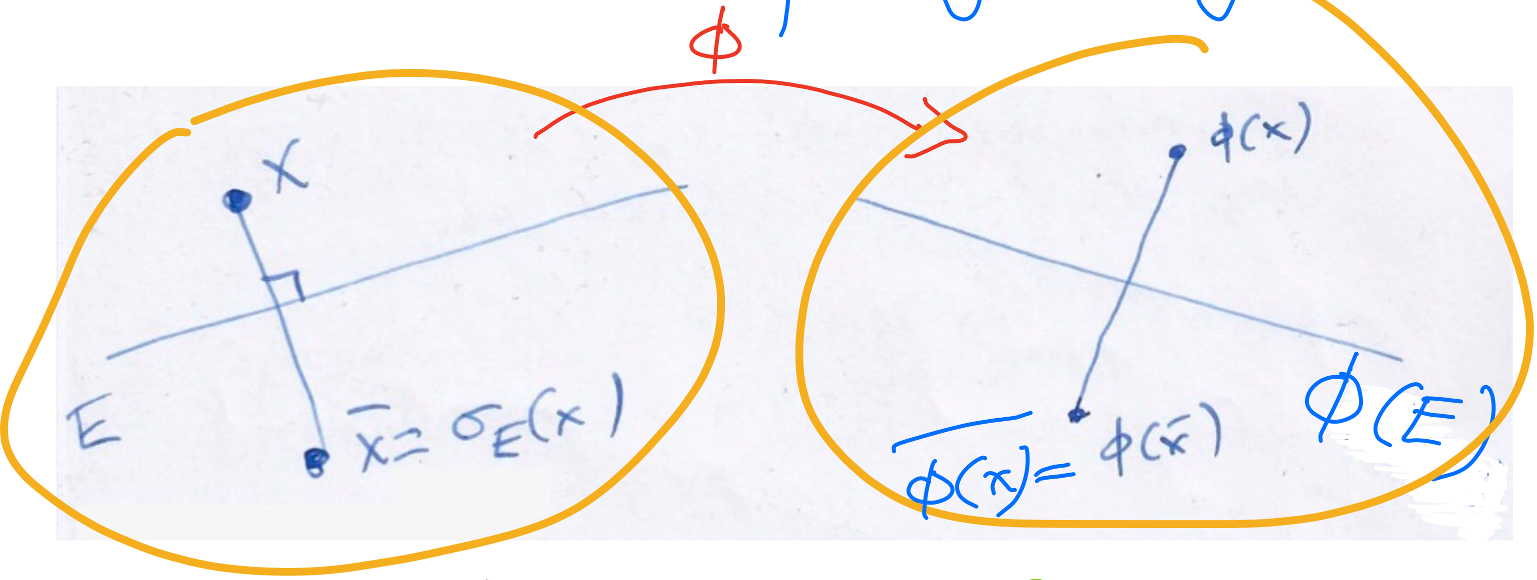
Offensichtlich sind alle Ebenenspiegelungen "gleicher Art."



Der Spiegelpunkt $\overline{x}$ $= \sigma_E(x)$ von x ist dadurch charakterisiert, dass

das Intervall $[x, \overline{x}]$ triff die Ebene E senkrecht in seinem Mittelpunkt m

Diese geometrische Beschreibung <u>charakterisert</u> die Spiegelung. Das heisst, wenn man das Bild isometrisch$^{\phi}$ wo anders kopiert, bekommt man wieder eine Spiegelung:



Spiegelung

wieder eine Spiegelung.

d.h.

$$\phi(\bar{x}) = \overline{\phi(x)}$$

$$\phi(\bar{x}) = \overline{\phi(x)}$$

d.h.

$$\phi(\sigma_E(x)) = \sigma_{\phi(E)}(\phi(x))$$

d.h.

$$\phi \circ \sigma_E = \sigma_{\phi(E)} \circ \phi$$

d.h.

$$(*) \quad \boxed{\sigma_{\phi(E)} = \phi \circ \sigma_E \circ \phi^{-1}}$$

Wir haben bewiesen:

<u>Aussage</u> Sei σ eine Ebenenspiegelung. Dann ist jede Konjugierte von σ wieder eine Ebenenspiegelung.

Für Spiegelungen gilt auch die Umkehrung:

<u>Aussage</u> Alle Ebenenspiegelungen sind konjugiert.

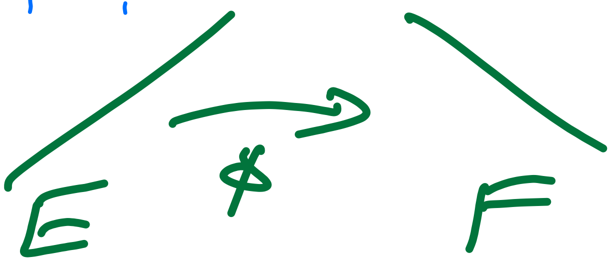
Beweis Seien

$$\sigma_E, \quad \sigma_F \quad \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$$

Ebenenspiegelungen.

Man wählt eine Isometrie $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\phi(E) = F.$$



Dann ist

$$\sigma_F = \sigma_{\phi(E)} = \phi \circ \sigma_E \circ \phi^{-1}$$

wegen (*). D.h. $\sigma_F \sim \sigma_E$.

QED

Warnung:

Für Translationen ist es ein bisschen anders. Sie erfüllen das Analogon von (*), aber nicht die Umkehrung. Mehr dazu später.

Zuerst mehr über (*).

$$(*) \quad \sigma_{\phi(E)} = \phi \circ \sigma_E \circ \phi^{-1}$$

Ein allgemeines Prinzip

Gleichung (*) ist Spezialfall eines allgemeinen Prinzips.

Nehme an, dass eine Isometrie ψ durch Daten

E

bestimmt ist, d.h. $\psi = \psi_E$

Das Prinzip sagt:

$$(\dagger) \quad \boxed{\psi_{\phi(E)} = \phi \circ \psi_E \circ \phi^{-1}}$$

In Worten:

If you map forward the data, you conjugate the isometry.

In deutschen Worten:

$$\boxed{\text{Bildet man die Daten ab, so konjugiert man die Isometrie.}}$$

Man kann die Formel (†) so lesen: um $\psi_{\phi(E)}$ zu berechnen, 1) geht man zurück mit ϕ^{-1}, 2) holt man ψ_E ab, 3) geht man vorwärts mit ϕ.

Also kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\psi_E"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\phi"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\psi_{\phi(E)}"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$$(\dagger) \quad \phi \circ \psi_E = \psi_{\phi(E)} \circ \phi$$

"kommutiert"

Isometrien, die konjugiert sind, teilen ihren geometrischen Eigenschaften. Aber wir klassifizieren Isometrien durch ihren geom. Eigenschaften. Das heisst:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{classification}\\ \text{of isometries}\end{array}} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{computation of}\\ \text{conjugacy classes}\end{array}}$$

Ein bisschen subtiler

In Abschnitt 12 haben wir 10 Arten von starren Bewegungen von $\mathbb{R}^3$ genannt. Bei dieser Klassifizierung geht es um etwas subtileres, als Konjugations-klassen.

Ein Beispiel:

(a) Ebenenspiegelungen bilden eine grosse Konjugationsklasse

(b) Translationen sind konjugiert, nur dann wenn der Verschiebungsabstand gleich ist. Also zerlegen sich die Translationen in vielen kleinen Konjugationsklassen.

$x \xrightarrow{d} T(x)$

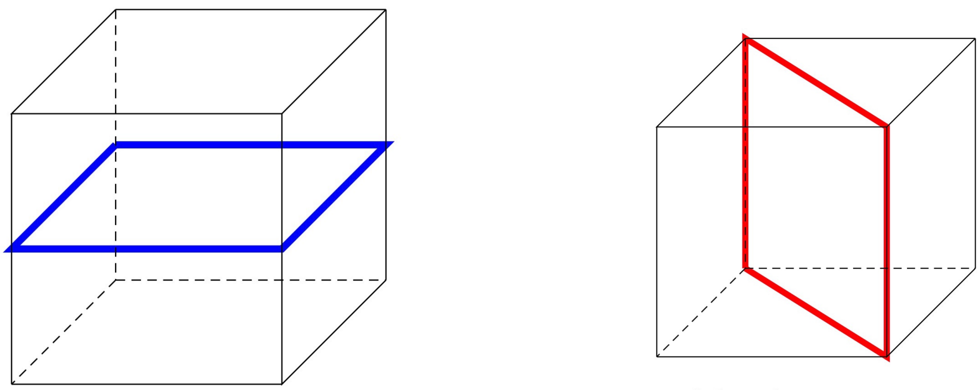
Trotzdem ähneln sich Translationen verschiedener Bewegungsabstände. Eigentlich gehören sie zusammen. Siehe Appendix 72 (Z-klassen).

Jenseits der Vorlesung

Eine weitere Subtilität

Konjugiertheit hängt von der umgebenden Gruppe ab.

Bspl (Würfel)



Diese beiden Ebenenspiegelungen sind

- konjugiert in $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$

  $\exists c \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3) : a = cbc^{-1}$
- nicht konjugiert in $\mathrm{Sym}(W)$

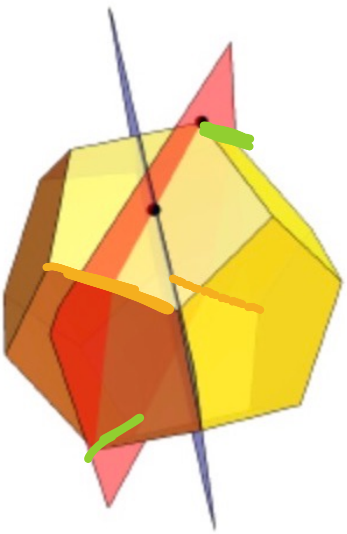
  $\nexists c \in \mathrm{Sym}(W) : a = cbc^{-1}$

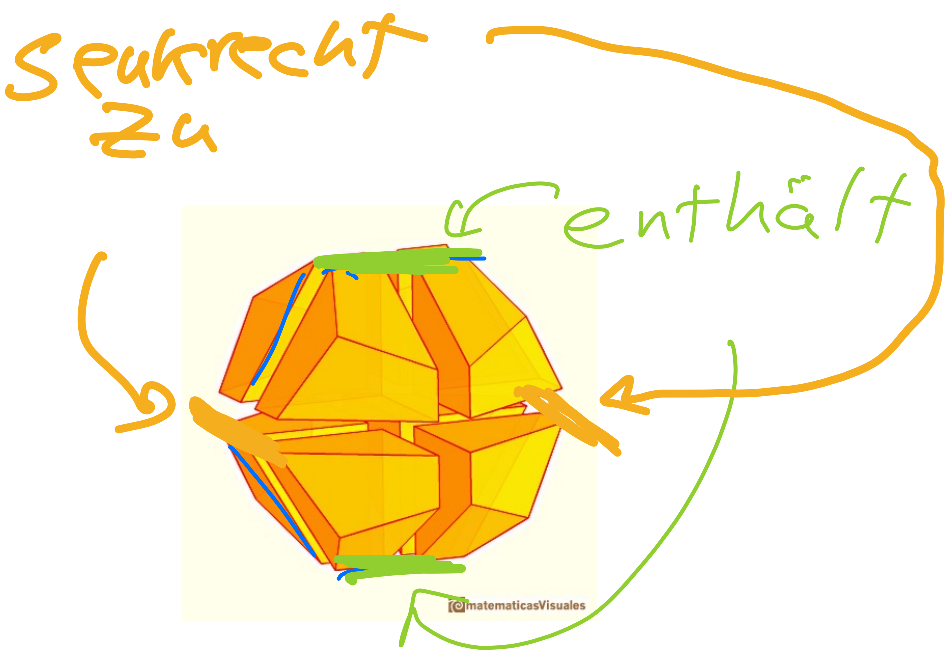
Gleiche Art Isometrie von $\mathbb{R}^3$

Nicht gleicher Art Symmetrie von W.

Bsp 2 (Dodekaeder)

Beim Dodekaeder gibt es nur eine Konjugations-klasse von Ebenenspiegel-ungen. Sie besteht aus 15 Ebenenspiegelungen. Jede solche Spiegelung enthält 2 gegenüberliegenden Kanten und ist senkrecht zu 2 andere gegenüberliegenden Kanten:





Analogie

Die Spiegelungen

- des Würfels: 2 Klassen
- des Dodekaeders: 1 Klasse

sind analog zu den Spiegelungen

- des Quadrats: 2 Klassen
- des 5-Ecks: 1 Klasse

Interessant!!

Abschnitt 33

Konjugierte Untergruppen

Innere und äussere Automorphismen:

G : Gruppe

c : Element von G

Def Die Abbildung

$$\Phi_c : a \longmapsto cac^{-1}$$

$$\Phi_c : G \longrightarrow G$$

heisst der innere Isomorphismus zu c.

Aussage

$\Phi_c : G \to G$ ist ein Automorphismus.

Beweis

$$\Phi_c(ab) = cabc^{-1}$$
$$= cac^{-1} \; cbc^{-1}$$
$$= \Phi_c(a)\Phi_c(b)$$

also Φ_c ist ein Homomorphismus. Die Umkehrabbildung von Φ_c ist $\Phi_{c^{-1}}$. Also Φ_c ist bijektiv. Also Φ_c ist ein Isomorphismus $G \to G$ QED

__Übung__ Zeige, dass

$$\Phi : G \longmapsto \mathrm{Aut}(G)$$
$$c \longmapsto \Phi_c$$

ein Homomorphismus ist.

Die Menge aller inneren Automorphismen von G ist geschrieben:

$$\underline{\underline{\mathrm{Inn}(G)}}. \quad \subseteq \mathrm{Aut}(G)$$

$$\mathrm{Inn}(G) = \mathrm{Bild}(\Phi).$$

Also $\mathrm{Inn}(G)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G)$:

$$\mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$$

Automorphismen, die nicht innere Automorphismen sind, heissen <u>äussere Automorphismen</u>

<u>Crazy Übung</u> Was passiert mit

G, $\mathrm{Aut}(G)$, $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(G))$, ...

????

Übung

a) Man findet eine äussere Automorphismus von $C_4 = \{I, D_{90}, D_{90}^2, D_{90}^3\}$

b) Man findet eine äussere Automorphismus von C_5, der nicht durch Konjugation in $\mathbb{R}^2$ realisiert werden kann.

c) Man findet ein nicht-trivialen äusseren Automorphismus von D_n, der trivial auf
innere
C_n operiert.

Konjugierte Untergruppen

G : Gruppe

$X \subseteq G$: Teilmenge

Man schreibt $\quad cHc^{-1} = \Phi_c(H)$

$$\underline{\underline{cXc^{-1}}}$$

für

$$\underline{\underline{\Phi_c(X)}} = \{cxc^{-1} \mid x \in X\}$$

Falls H eine Untergruppe ist, so ist auch cHc^{-1} eine Untergruppe (weil Φ_c ein Automorphismus ist).

Falls $K = cHc^{-1}$ für ein $c \in G$, sagen wir, dass K und H <u>konjugiert</u> in G sind. Man schreibt

$$K \sim H \quad \text{oder} \quad K \sim_G H.$$

Das ist eine Äquivalenz-relation (Beweis schnell) auf der Menge aller Untergruppen von G.

Man interpretiert das, als "H und K liegen in G auf der gleichen Weise"

Bsp $G = D_3$

Wir haben

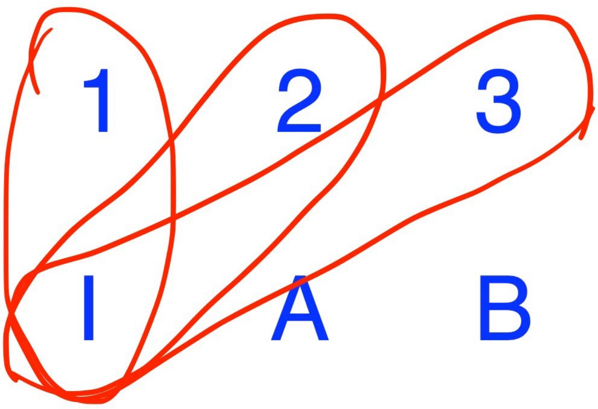
- $\{I, 1\} \sim \{I, 2\} \sim \{I, 3\}$

z.B. $B\{I, 2\}B^{-1}$

$$= \{BIB^{-1}, B2B^{-1}\}$$

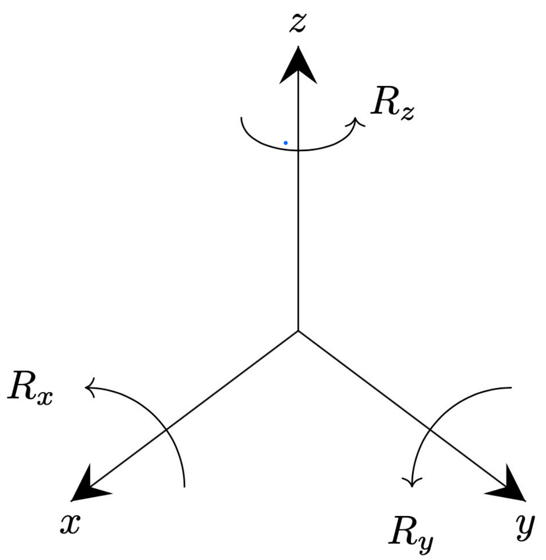
$$= \{I, 1\}$$

also $\{I, 2\} \sim \{I, 1\}$



- $\{I, A, B\}$
- $\{I\}$
- $\{I, A, B, 1, 2, 3\}$

Bsp (Drehungen von W)



R_x = 90-Drehung um x-Achse

R_y = " y- "

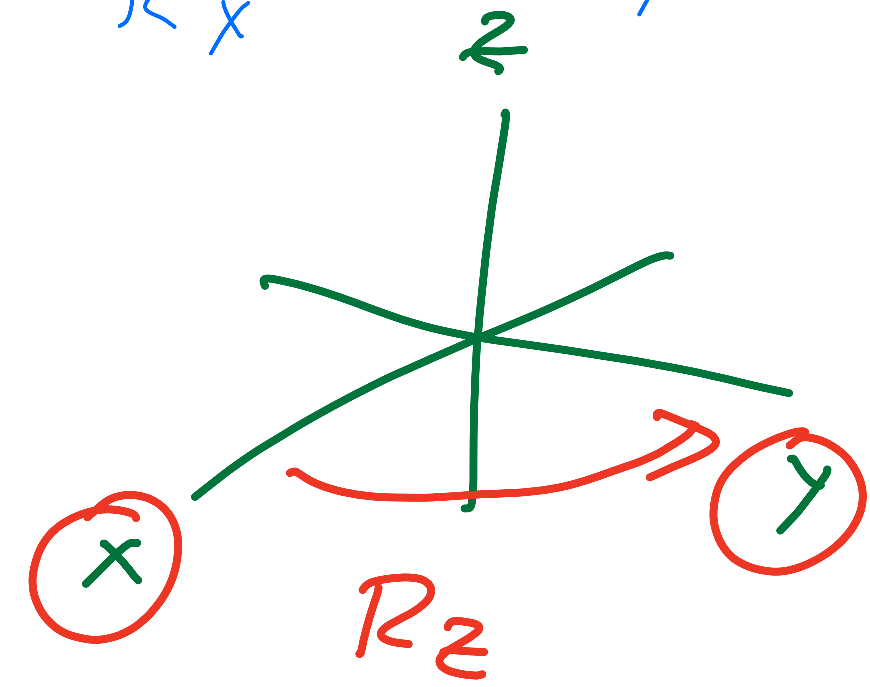
R_z = " z- "

z. B.

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{usw.}$$

Man hat

- $R_y = R_z R_x R_z^{-1}$
- $R_z = R_x R_y R_x^{-1}$
- $R_x = R_y R_z R_y^{-1}$



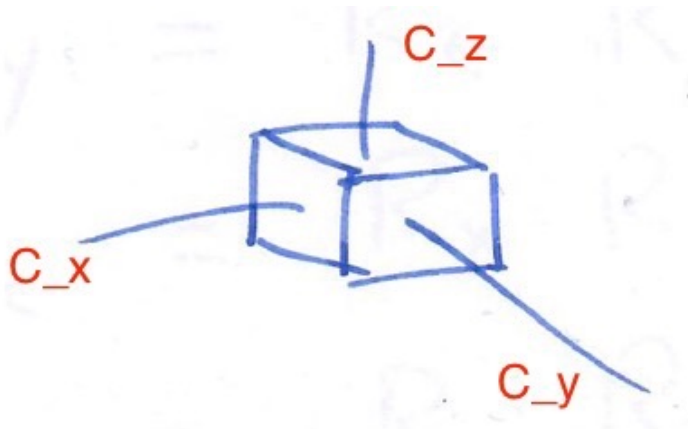
Prinzip (+)

Sei

$$C_x = \langle R_x \rangle = \{I, R_x, R_x^2, R_x^3\}$$

$$C_y = \langle R_y \rangle = \dots$$

$$C_z = \langle R_z \rangle = \dots$$



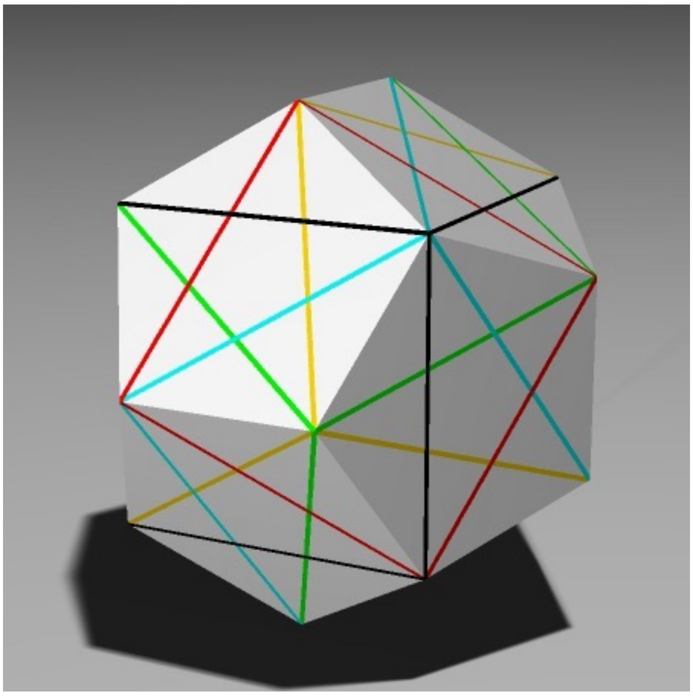
$$R_x \sim R_y \sim R_z$$

Also

$$C_x \sim C_y \sim C_z$$

z.B. $C_x = R_z^{-1} C_y R_z$ usw.

Bsp



Es gibt 5 Würfeln im Dodekaeder.

Übung Man findet 5 konjugierte Untergruppen von Isom (D) der Ordnung 24.

Aussage Konjugierte Untergruppen sind isomorph.

Beweis

Sei $H, K \subseteq G$ konjugiert in G:

$$H = cKc^{-1}$$

$$H = \Phi_c(K)$$

$\Phi_c : G \to G$ Autom.

$\Phi_c|K : K \to \Phi_c(K) = H$ ist ein Isomorphismus. QED.

__Bsp__ Man findet 2 Untergruppen, die isomorph sind, aber nicht konjugiert.

$\mathrm{Sym}(\text{Quadrat}) = D_4$

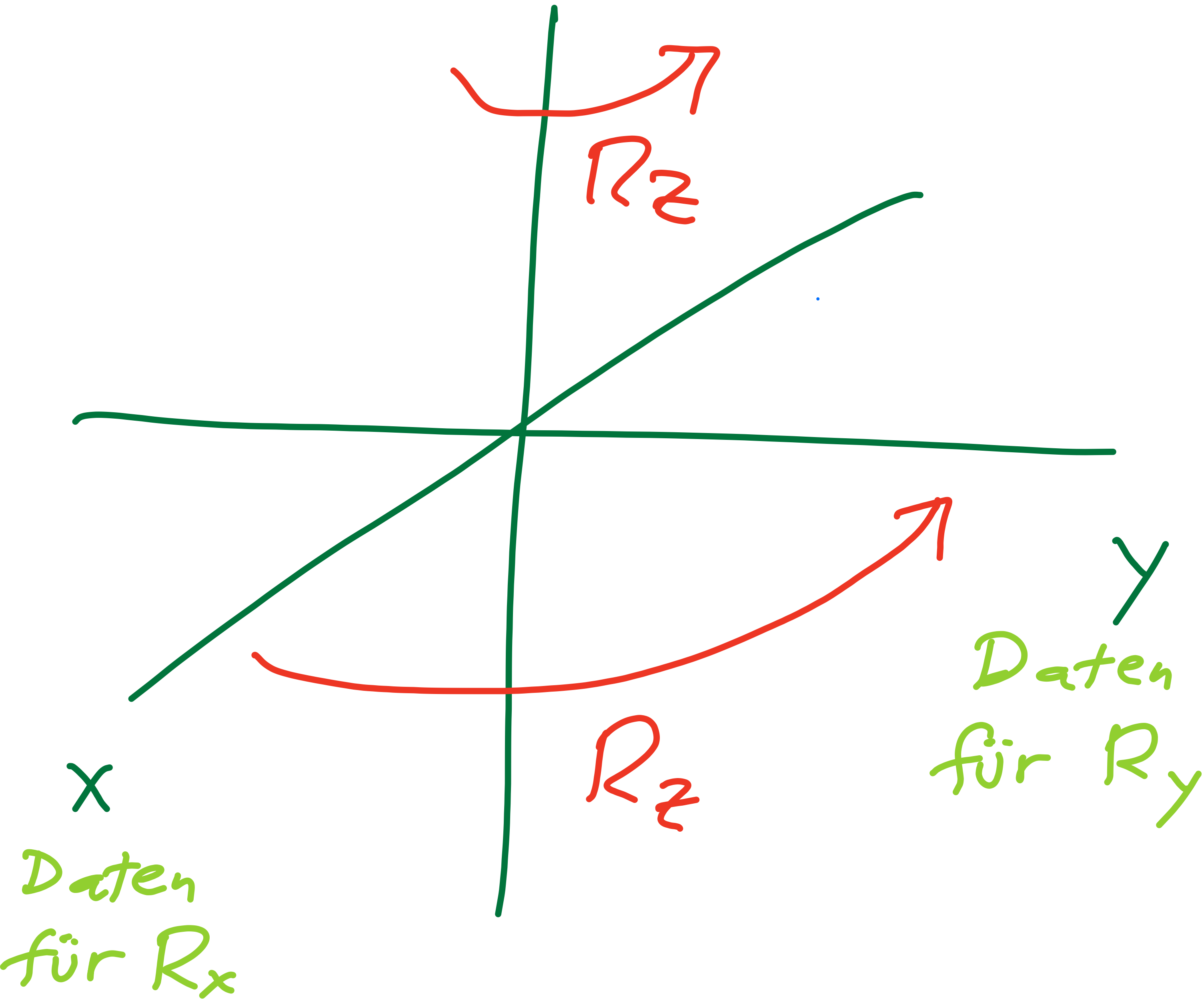
σ_C = Ebenensp. in C

σ_D = " in D

C D

$$\langle \sigma_C \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \cong \langle \sigma_D \rangle$$

$$\langle \sigma_C \rangle \not\sim_{D_4} \langle \sigma_D \rangle$$



$$\underbrace{R_{R_z(x\text{-Achse})}}_{R_{y\text{-Achse}}} = R_z \, R_{x\text{-Achse}} \, R_z^{-1}$$

$$R_y = R_z \, R_x \, R_z^{-1}$$