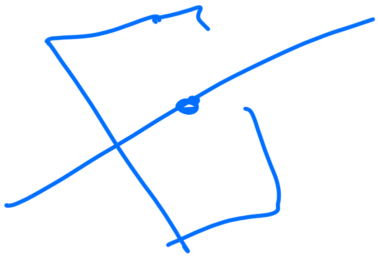
Abschnitt 34

Symmetrien des Würfels

Die Daten, die Symmetrieoperationen bestimmen, heissen Symmetrieelemente. Ein Symmetrieelement besteht meistens aus der Fixpunktmenge zusammen mit Beschreibung und manchmal eine Zahl. z.B.:

- Inversionspunkt
- Spiegelungsebene
- n-zählige Drehachse
- n-zählige Drehspiegelachse (mit Punkt oder Ebene)



Die Bestimmung einer Art Symmetrieelement definiert eine Konjugationsklasse der Gruppe.

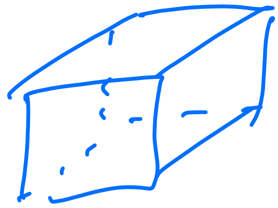
Beispiel Sym(W)

Wir kennen die Symmetrien des Würfels ziemlich gut bis jetzt. Bitte lesen Sie Abschnitt 34 für sich. Ich stelle nur die Resultate dar

---

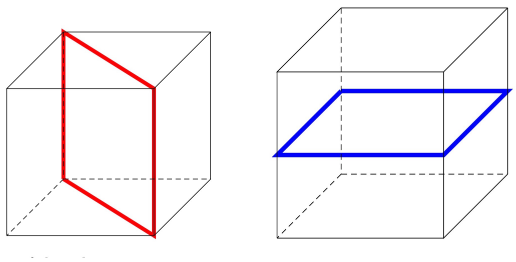
Das Ergebnis: Alle Elemente von Sym(W) nach Konjugationsklasse sortiert.

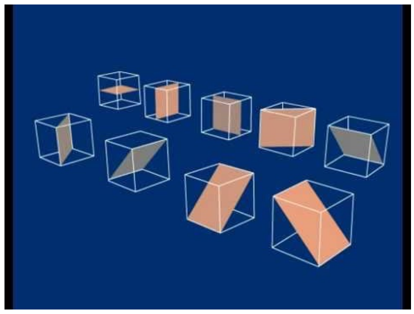
Elemente von Sym(W)



- Identität 1
- Inversionspunkt 1
- 2 Arte von Spiegelebene

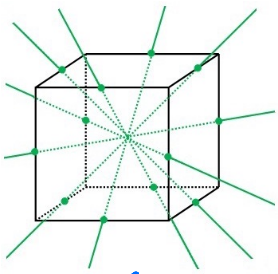
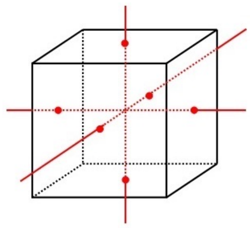
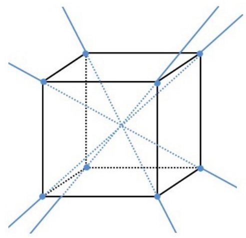
$9 = 6 + 3$ Ebenenspiegelungen

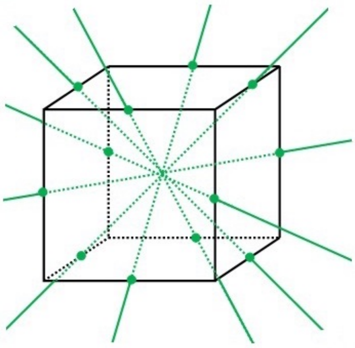




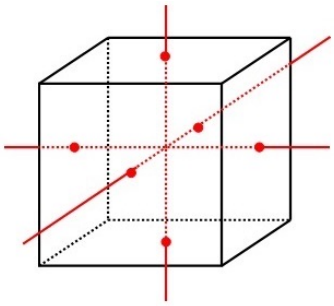
$6 + 3 = 9$

- 3 Arte von Achse

Kurzdiagonalen	Koordinatenachsen	Lang-diagonalen
		
6	3	4
6 2-zählige Dreachsen	3 4-zählige Drehachsen ≠ 3 4-zählige Drehspiegel-achsen (*)	4 6-zählige Drehspiegel-achsen ∪| 4 3-zählige Drehachsen (*)



6 2-zählige Drehungen



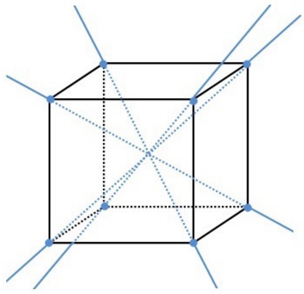
15 Elemente:

6 4-zählige Drehungen

6 4-zählige Drehspieg.

3 2-zählige Drehungen

(*)



16 Elemente:

8 6-zählige Drehspieg.

8 3-zählig Drehungen

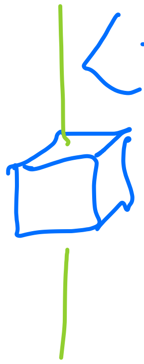
(*)

Konjugationsklassen

(*) 2 Gruppen

$\langle R \rangle = \{I, R, R^2, R^3\}$ R = Drehung um 90

$\langle T \rangle = \{I, T, T^2, T^3\}$ T = Drehspiegelung um 90

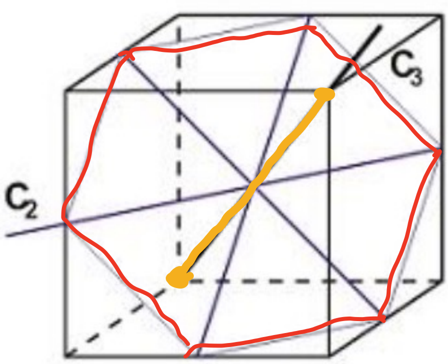


$\boxed{T^2 = R^2 = 2 \text{ zählige Drehung}}$

$$\begin{tikzcd}
 & R & & R^3 & \\
1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & T^2 = R^2 \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & 1 \arrow[ul, dash] \arrow[dl, dash] \\
 & T & & T^3 &
\end{tikzcd}$$

(*) 1 Gruppe

$\langle S \rangle = \{I, S, S^2, S^3, S^4, S^5\}$



S = Drehspiegelung um 60

Drehsp.

$$\begin{tikzcd}
 & S \text{ 6zählig} & & \cancel{S^3} \text{ 2z. Inversion} & & S^5 \text{ 6 zählig} & \\
1 \arrow[ur, dash] & & S^2 \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & & S^4 \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & & 1 \arrow[ul, dash]
\end{tikzcd}$$

Drehungen 3-zählig

order	# elements
1	1
2	19 = 6+3+6+3+1
3	8
4	12 = 6+6
6	8

Konjugationsklassen

E = or.erhaltend
U = or.umkehrend

order	#	# in conj class	form	
1	1	1	id	E
2	19	1	inversion	U
		3	coord 180	E
		3	coord refl	U
		6	diag 180	E
		6	diag refl	U
3	8	8	catty 120	E
4	12	6	coord 90	E
		6	coord 90 roto	U
6	8	8	catty 60 roto	U

fehlen bei Sym(P)

OE = 1 + 3 + 6 + 6 + 8
OU = 1 + 3 + 6 + 6 + 8

Frage: warum?

Theoretisch muss die Ordnung eines Elementen immer die Ordnung der Gruppe teilen.

$\# \mathrm{Sym}(W) = 48$

Elemente dürfen der Ordnung

$1, 2, 3, 4, 6, \cancel{8}, \cancel{12}, \cancel{16}, \cancel{24}, \cancel{48}$

haben. Wieviel Ordnungen tatsächlich erscheinen?

Übung Man findet eine grosse Gruppe, wo alle Elemente nur die Ordnung 1 oder 2 haben.

<u>Übung</u> Kann man die Würfelgruppe mit nur 2 Elementen erzeugen, oder braucht man 3 ?

Abschnitt 35

Untergruppen der Würfelgruppe

Aufgabe: Man klassifiziert alle Untergruppen von Sym(W) in Konjugationsklassen.

Ich mache nicht ganz alles.

Ich finde aber mindestens eine Gruppe mit jeder möglichen Ordnung

$$\underbrace{1, 2, 3, 4, 6}, 8, 12, 16, 24, 48$$

∃ zyklische Untergruppen all dieser Ordnungen. (Ab. 34)

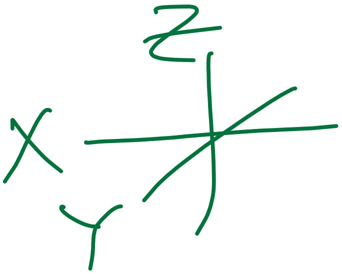
Eine andere Untergruppe der Ordnung 6.

$\langle s \rangle =$
(schon $\mathbb{Z}_6$ gefunden)

$S_3 \subseteq \mathrm{Sym}(W)$

Kann ich 3 Dinge (geometrische Objekte) finden, wobei Sym(W) agiert, indem sie permutiert die 3 Dinge mit allen 6 Permutationen?

Sym(W) agiert (operiert) auf den $\underline{\underline{3}}$ Koordinatenachsen



$()$, (XYZ), (XZY)
(XY), (YZ), (XZ)

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

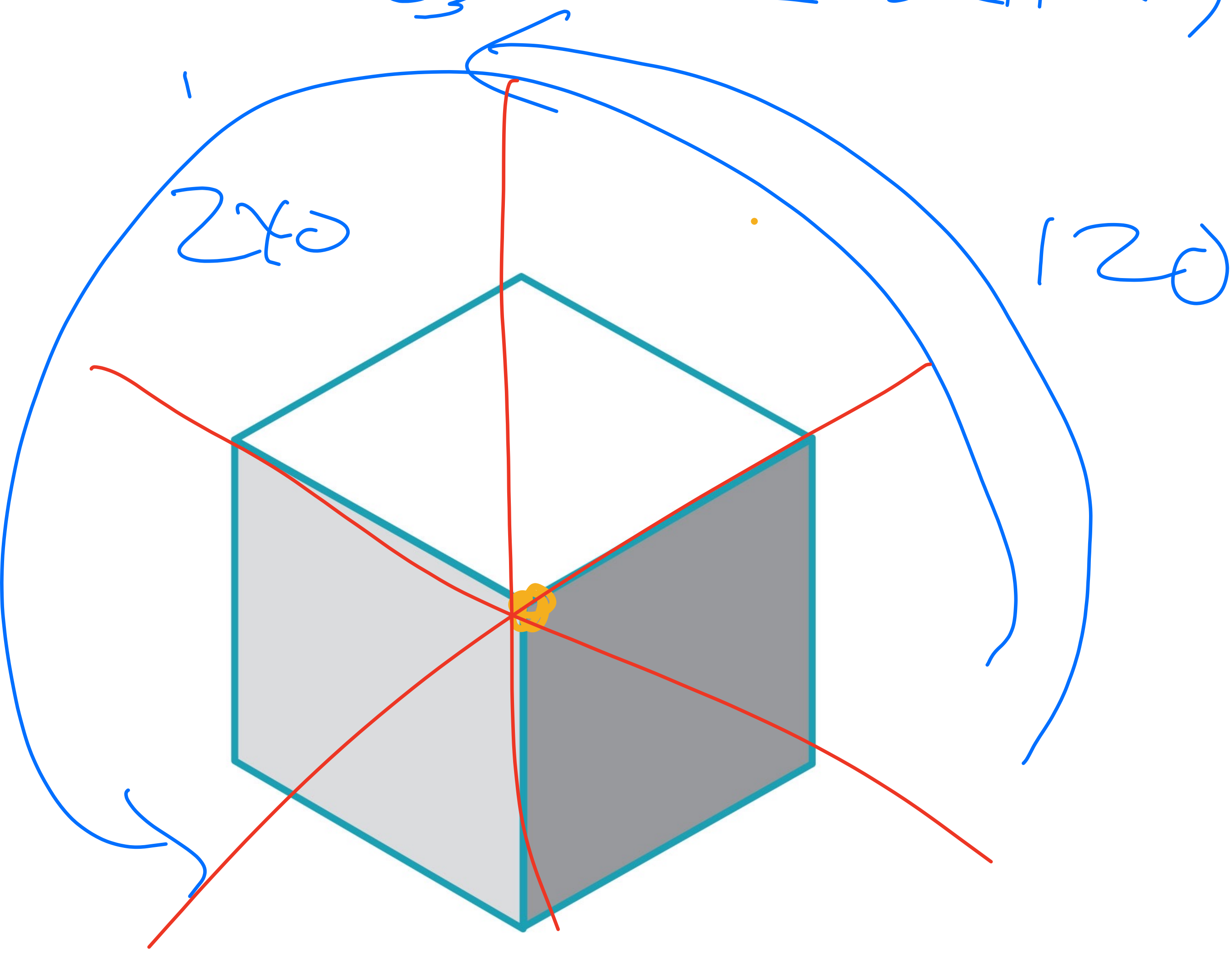
$()$ $\quad (XYZ)$ $\quad (XZY)$ $\quad (YZ)$ $\quad (XZ)$ $\quad (XY)$

Ein zweiter Blick auf diese Untergruppe:

$H = \{ g \in Sym(W) :$ g erhält die Achse $\}$

$= \{ I, R_{120}, R_{240},$ 3 Ebenenspiegelungen $\}$
XY, XZ, YZ

$= S_3$ (vor 2 seiten)

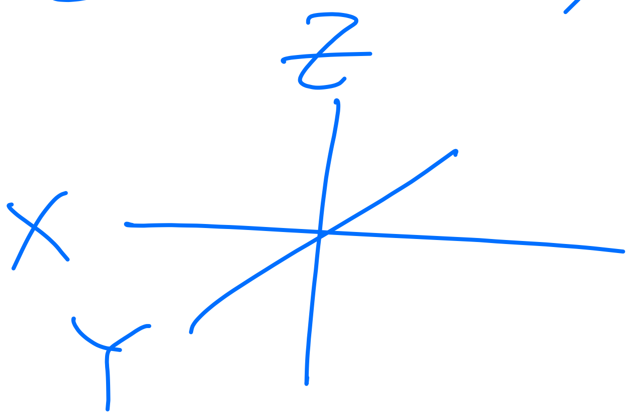


Ordnung 8

Sei
σ_x = Ebenenspiegelung an der yz-Ebene

σ_y = " xz "

σ_z = " xy "



Sei $K = \langle \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \rangle$.

Sie dürfen sich überzeugen

K ist kommutativ mit

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$$

$$\sigma_x \sigma_y = \sigma_y \sigma_x \quad \text{usw}$$

$K = \{ I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$] Ebenen-spieg.,

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_x \sigma_y \\ \sigma_x \sigma_z \\ \sigma_y \sigma_z \end{array}\right\} \text{Geradenspiegel.} = 180 \text{ Drehungen}$$

$$\sigma_x \sigma_y \sigma_z \} \text{ Inversion } \}$$

$$= \{ \sigma_x^{\varepsilon_1} \sigma_y^{\varepsilon_2} \sigma_z^{\varepsilon_3} \mid \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \underbrace{\{\pm 1\}}_{= \{+1, -1\}} \}$$

$$\underline{\underline{\# K = 8}}$$

Ordnung 24

- $Sym_+(W)$
- $Sym(T)$
- $Sym(P)$ $P =$ Pyritoeder

- $Sym_+(W)$

besteht ausschliesslich aus Drehungen.

$$Sym_+(W) = \{\phi \in Sym(W) : \phi \text{ OE}\}$$

$=$ genau die Hälfte

$=$ 24 Elemente

$$\# Sym(W) = 24$$

"Proper Symmetry group of W".

• Sym(T)

Schon gesehen:

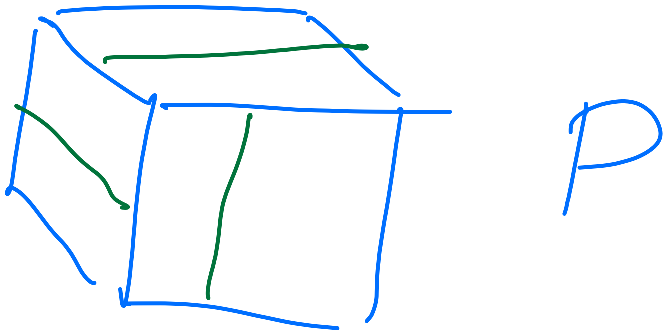
$$S_4 \cong \underset{24}{\mathrm{Sym}(T)} \subseteq \underset{48}{\mathrm{Sym}(W)}$$

Es gibt (wie gesehen) 2 Tetraeder im Würfel.
Genau die Hälfte der Symmetrien in Sym(W) erhalten jeden Würfel.
Die andere Hälfte vertauschen die beiden Tetraeder.

$$\Longrightarrow \#\mathrm{Sym}(T) = 24$$

Sym(P) Pyritoedergruppe

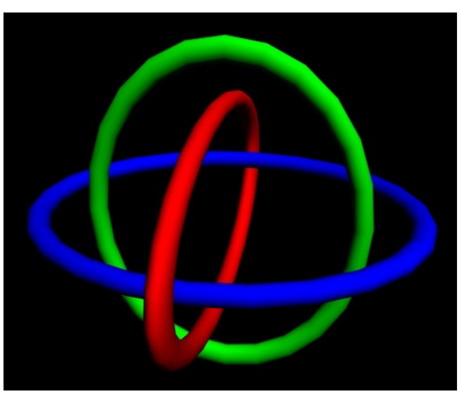
P = Pyritoeder



hat keine 4-zählige Drehungen oder Drehspieg. mehr

$\#\mathrm{Sym}(P) = 24$

Gleiche Symmetriegruppe!



Borromsche Ringe

Übung (1) Man verifiziere, dass diese 3 Untergruppen verschieden sind.

(2) Man verifiziert, dass jede der 3 Untergruppe nur zu sich selbst konjugiert ist, (d.h. die sind normal in Sym(W))

Übung Eine Untergruppe der Index 2 ist immer normal

48/24=2

Ubung: Symmetriegruppe ?

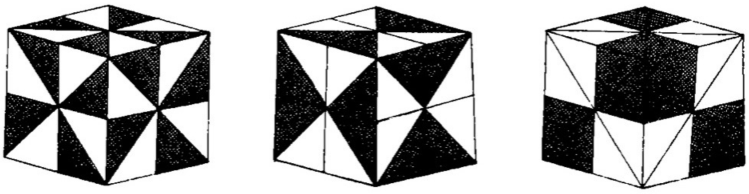


Figure 5.5. The perfect two-colorings of the plate and the cube.

Ordnung 12

$$\mathrm{Sym}_+(T) = \mathrm{Sym}(T) \cap \mathrm{Sym}_+(W)$$

index 2 in $\mathrm{Sym}(T)$

$$\#\mathrm{Sym}_+(T) = 12$$

Übung

Man zeigt

$$\overset{12}{\mathrm{Sym}_+(T)} = \overset{12}{\mathrm{Sym}_+(P)}$$

$$= \underset{24}{\mathrm{Sym}(T)} \cap \underset{24}{\mathrm{Sym}_+(W)}$$

$$= \underset{24}{\mathrm{Sym}(T)} \cap \underset{24}{\mathrm{Sym}(P)}$$

$$= \underset{24}{\mathrm{Sym}_+(W)} \cap \underset{24}{\mathrm{Sym}(P)}$$

Übung $\mathrm{Sym}_+(T)$ ist normal in $\mathrm{Sym}(W)$

$$\Rightarrow \{\mathrm{Sym}_+(T)\}$$

ist schon die Konjugations-klasse von $\mathrm{Sym}_+(T)$.

Übung Ordnung 16 – für Sie.

G Gruppe

$G_+ = G \cap \mathrm{Isom}_+(\mathbb{R}^3)$

<u>Beh</u> $[G, G_+] = 1$ oder 2.

<u>Bew</u> Falls nicht 1,

$\exists\, g \in G$ OU.

Dann

$L_g : G \to G$ bij.

$L_g : G_+ \to g G_+$ bij

$\# G_+ = \# g G_+$

$G = G_f \cup g G_f$

Also die Linksklassen sind

$G_f, \quad gG_f$

Also $[G : G_f] = 2$

QED.