Fun fact:

99% der Gruppen der Ordnung höchstens 2000 sind der Ordnung 1024.

$= 2^{10}$

Besche, Eick, O'Brien, "The groups of order at most 2000", 2001.

Abschnitt 36

Würfelgruppe untergruppentabellen

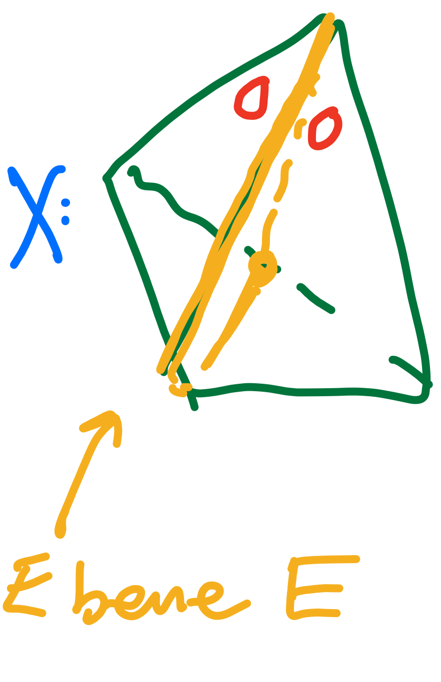
Tabelle der Untergruppen
von $\mathrm{Sym}(T)$, T = Tetraeder,
24
geordnet nach Konjugationsklasse:

order	#	# in conj class	type	Schoenflies symbol	description
1	1	1			identity
2	9	3	$\mathbb{Z}_2$	C_2	2-fold coord axis
		6	$\mathbb{Z}_2$	$C_s = C_{1h}$	diag reflection plane
3	4	4	$\mathbb{Z}_3$	C_3	3-fold catty axis
4	7	1	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	D_2	three 2-fold coord axes
		3	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	C_{2v}	two perpendicular diag reflection planes
		3	$\mathbb{Z}_4$	S_4	4-fold coord roto-reflection axis
6	4	4	S_3	C_{3v}	3-fold catty axis three diag reflection planes
8	3	3	$\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$	D_{2d}	4-fold coord roto-reflection axis three 2-fold coord axes two vertical reflection planes
12	1	1	A_4	T	orientation-preserving
24	1	1	S_4	T_d	all

Bitte studieren Sie sie sorgfältig.

Die Schoenflies-Symbolen sind eine Art Namengebung für diese Gruppen.

Übung: Für jede Untergruppentypus H der Tetraedergruppe markiert oder färbt man T, sodass die Symmetriegruppe von T auf H reduziert ist.



$$\mathrm{Sym}(X) = \{I, \sigma_E\}$$

$$= C_s$$

aus der Tabelle

Hier sind die Untergruppen von Sym(W), W = Würfel:

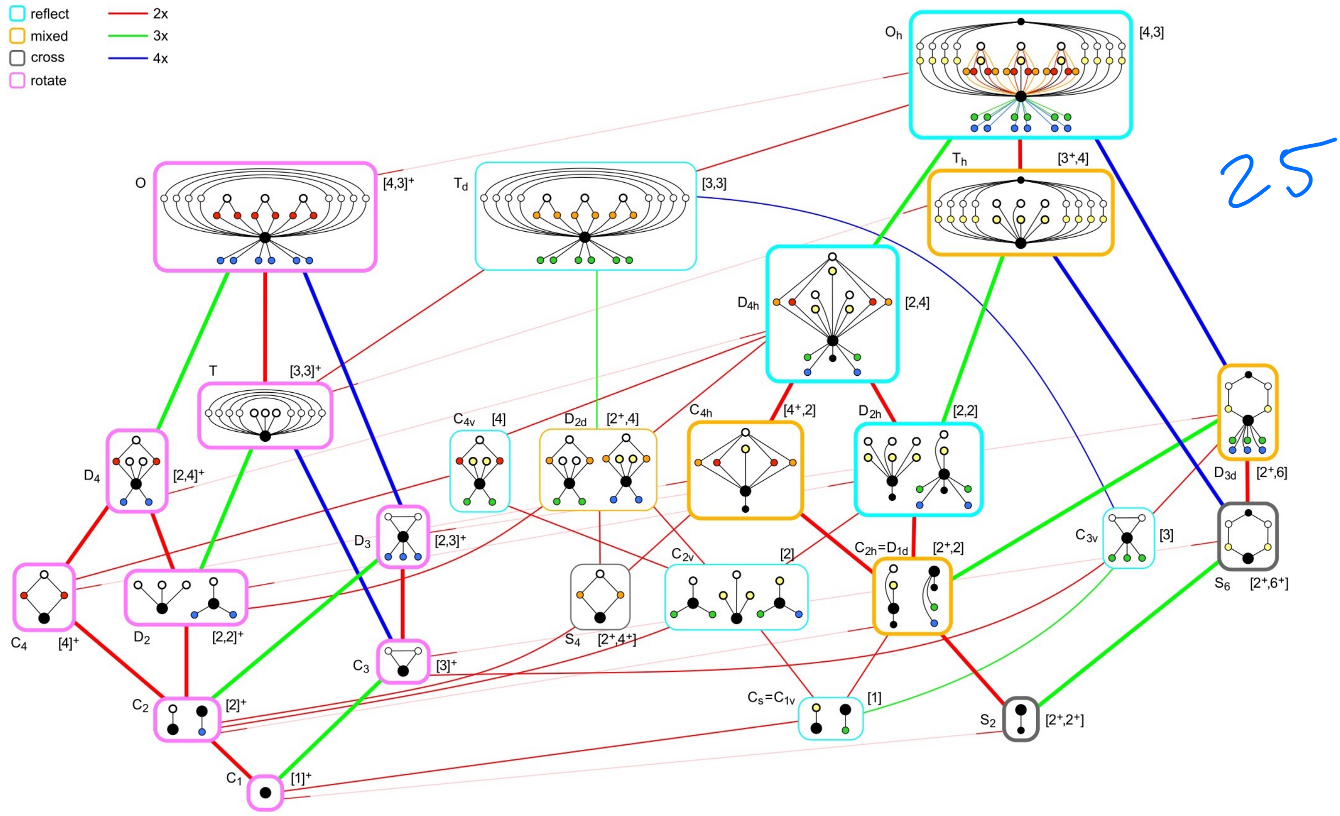
Subgroups of full octahedral symmetry [edit]

Schoe.	Coxeter		Orb.	H-M	Structure	Cyc.	Order	Index
O_h	[4,3]		*432	$m\bar{3}m$	$S_4 \times S_2$		48	1
T_d	[3,3]		*332	$\bar{4}3m$	S_4		24	2
D_{4h}	[2,4]		*224	4/mmm	$Dih_1 \times Dih_4$		16	3
D_{2h}	[2,2]		*222	mmm	$Dih_1^3 = Dih_1 \times Dih_2$		8	6
C_{4v}	[4]		*44	4mm	Dih_4		8	6
C_{3v}	[3]		*33	3m	$Dih_3 = S_3$		6	8
C_{2v}	[2]		*22	mm2	Dih_2		4	12
$C_s = C_{1v}$	[ ]		*	$\bar{2}$ or m	Dih_1		2	24
T_h	$[3^+,4]$		3*2	$m\bar{3}$	$A_4 \times S_2$		24	2
C_{4h}	$[4^+,2]$		4*	4/m	$Z_4 \times Dih_1$		8	6
D_{3d}	$[2^+,6]$		2*3	$\bar{3}m$	$Dih_6 = Z_2 \times Dih_3$		12	4
D_{2d}	$[2^+,4]$		2*2	$\bar{4}2m$	Dih_4		8	6
$C_{2h} = D_{1d}$	$[2^+,2]$		2*	2/m	$Z_2 \times Dih_1$		4	12
S_6	$[2^+,6^+]$		3×	$\bar{3}$	$Z_6 = Z_2 \times Z_3$		6	8
S_4	$[2^+,4^+]$		2×	$\bar{4}$	Z_4		4	12
S_2	$[2^+,2^+]$		×	$\bar{1}$	S_2		2	24
O	$[4,3]^+$		432	432	S_4		24	2
T	$[3,3]^+$		332	23	A_4		12	4
D_4	$[2,4]^+$		224	422	Dih_4		8	6
D_3	$[2,3]^+$		223	322	$Dih_3 = S_3$		6	8
D_2	$[2,2]^+$		222	222	$Dih_2 = Z_2^2$		4	12
C_4	$[4]^+$		44	4	Z_4		4	12
C_3	$[3]^+$		33	3	$Z_3 = A_3$		3	16
C_2	$[2]^+$		22	2	Z_2		2	24
C_1	$[ ]^+$		11	1	Z_1		1	48

25

Werfen Sie einen Blick darauf.
Versuch nicht, alles zu verstehen!

Noch eine Tabelle der Untergruppen von Sym(W):



25

Was für ein Wunder.

Man konzentriert auf die !
erste Tabelle, die von Sym(T).

Übung

(a) Man findet 3 konjugierte Untergruppen von $Sym(T)$ der Ordnung 8.

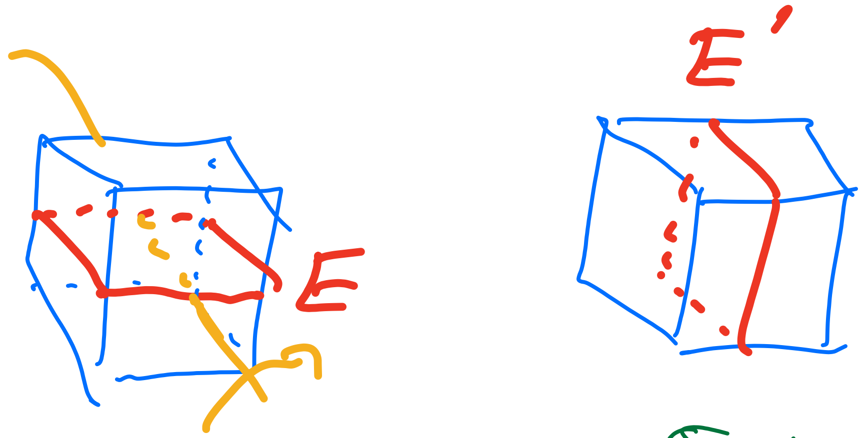
(b) Man findet 3 konjugierte Untergruppen von $Sym(W)$ der Ordnung 16.

Bmk

Typus heisst Isomorphieklasse

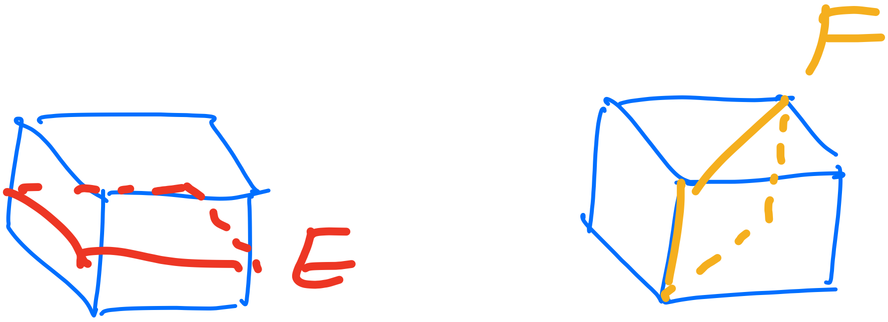
Frage In der Sym(T) Tabelle und der Sym(W) Tabelle, ist die Klassifikation nach Isomorphieklasse oder Konjugationsklasse?

Wenn Konjugationsklasse, dann in Sym(T) bzw Sym(W), oder in $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$?



konjugiert

$\sigma_E \sim \sigma_{E'}$



nicht konjugiert

$\sigma_E \not\sim \sigma_F$

$\exists\, \phi \in Sym(W): \phi(E) = E'$

Also $\sigma_E \sim \sigma_{E'}$ in $Sym(W)$

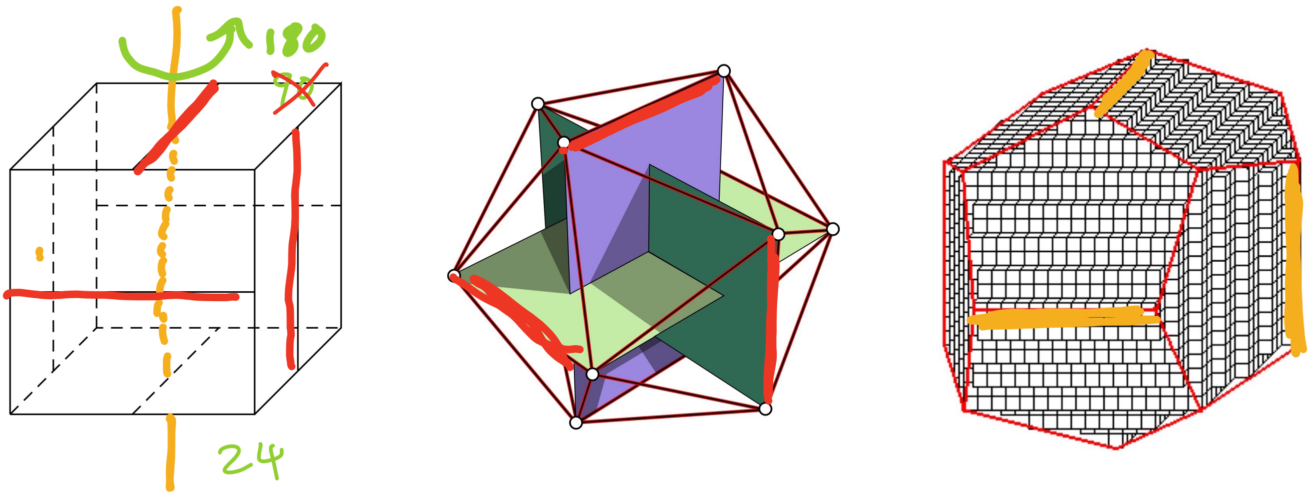
$\nexists\, \phi \in Sym(W): \phi(E) = F$

Also $\sigma_E \not\sim \sigma_F$ in $Sym(W)$

Abschnitt 37

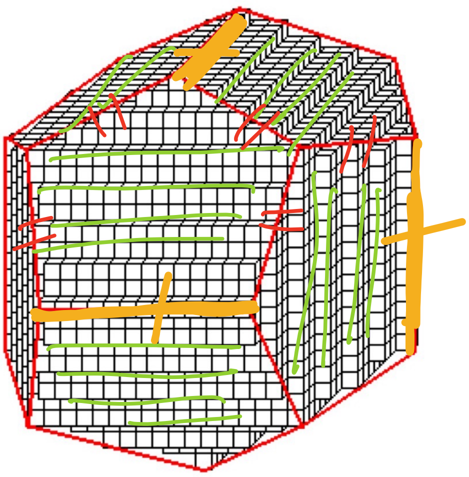
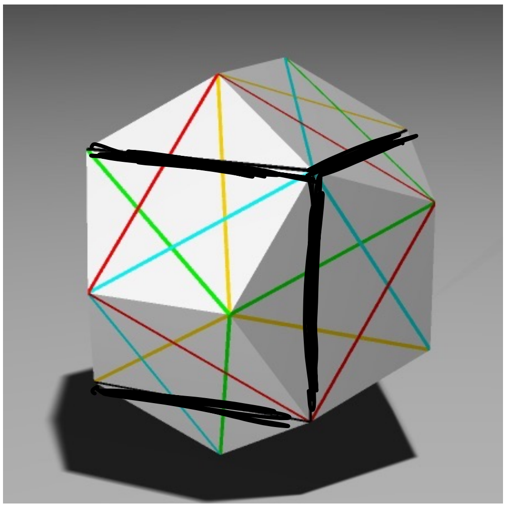
Untergruppenbeziehungen zwischen Platonischen Gruppen

Zur Erinnerung: Die Pyritoedergruppe ist Sym(P), wobei P ein Pyritoeder ist:



Alle 3 haben dieselben Symmetrien. Das dritte ist ein echtes Pyritoeder. Es hat ungefähr die Form eines Dodekaeders, aber die Markierungen (und die leicht asymmetrischen

Seiten) schränken die Symmetriegruppe auf Sym(P) ein.

P   D'

Auf der rechten Seite hat man ein echtes Dodekaeder D. 120

Betrachtet man nun D markiert mit dem schwarzen Würfelkanten, so bekommt man eine Figur D', deren Symmetriegruppe Sym(P) ist.

Jede Symmetrie von D' erhält D. Also

$$\mathrm{Sym}(P) \equiv \mathrm{Sym}(D') \subseteq \mathrm{Sym}(D).$$

$$\boxed{\underset{24}{\mathrm{Sym}(P)} \subseteq \underset{120}{\mathrm{Sym}(D)}}$$

Aber nicht nur das. Es gibt 5 würfeln im Dodekader.

Also gibt es 5 Kopien

$$\underset{24}{\mathrm{Sym}}(P_1), \ldots, \underset{24}{\mathrm{Sym}}(P_5)$$

von $\underset{24}{\mathrm{Sym}(P)}$ in $\underset{120}{\mathrm{Sym}(D)}$.

Alle sind konjugiert.

Man hat den folgenden Satz über Inklusionen zwischen platonischen Gruppen.

<u>Satz 1</u>

1) $$\overset{24}{\mathrm{Sym}_+}(W),\ \overset{24}{\mathrm{Sym}}(T),\ \overset{24}{\mathrm{Sym}}(P) \subseteq \overset{48}{\mathrm{Sym}}(W)$$

2) $${}_{12}\mathrm{Sym}_+(P) = \mathrm{Sym}_+(T)$$
$${}_{120}\mathrm{Sym}(D) = \mathrm{Sym}(I)$$
$${}_{48}\mathrm{Sym}(W) = \mathrm{Sym}(O)$$

3) $$\underset{24}{\mathrm{Sym}_+}(W) \cong \mathrm{Sym}(T) \cong S_4{}^{24}$$

Manche Beweise habe ich nicht in der Vorlesung dargestellt, aber alle sind im Skript diskutiert.

Abschnitt 38

Produktbeziehungen zwischen platonischen Gruppen

Def Das direkte Produkt $A \times B$ von zwei Gruppen A und B ist die Gruppe

$$(A \times B, \,\cdot\,)$$

wobei

$$(a, b) \cdot (a', b') := (aa', bb')$$

("Obvious multiplication")

Bsp

(1) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$

(2) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \not\cong \mathbb{Z}_4$

Beweis

(1) Man schreibt

$$\mathbb{Z}_2 = \{1, a\} \qquad a^2 = 1$$

$$\mathbb{Z}_3 = \{1, b, b^2\} \qquad b^3 = 1$$

Dann ist

$$c := (a, b) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$$

ein Element der Ordnung 6, das $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \langle c \rangle \cong \mathbb{Z}_6$ erzeugt.

$c^2, c^3 \neq (1,1)$ $\qquad$ $c^6 = (1,1)$

$c^3 = (a,1), \; c^4 = (1,b)$

(2) $\mathbb{Z}_2 = \{1, a\}$ $\quad a^2 = 1$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(1,1), (1,a), (a,1), (a,a)\}$$

$$\mathbb{Z}_4 = \{1, d, d^2, d^3\} \quad d^4 = 1$$

- Jedes Element von $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ist der Ordnung 2.
- Aber $\mathbb{Z}_4$ besitzt ein Element der Ordnung 4.

QED

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ heisst <u>kleinscher</u> <u>Vierergruppe</u>.

Man hat folgende Produktbeziehungen zwischen platonischen Gruppen:

auf natürliche Weise

Satz 2

(a) $Sym(I) = Sym_+(I) \times \mathbb{Z}_2$

(b) $Sym(W) = Sym_+(W) \times \mathbb{Z}_2$

(c) $Sym(W) = Sym(T) \times \mathbb{Z}_2$

(d) $Sym(P) = Sym_+(P) \times \mathbb{Z}_2$

Diese Beziehungen sind völlig kompatibel mit den Inklusionen und Isomorphismen von Satz 1.

Beweis Wir beweisen nur (b):

$$\mathrm{Sym}(W) = \mathrm{Sym}_+(W) \times \mathbb{Z}_2 .$$

Die anderen Beweise sind ähnlich.

$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ = Inversion durch 0

Idee: 1) $-I$ kommutiert mit jeder Isometrie, die 0 fixiert. 2) Dazu liegt $-I$ in $\mathrm{Sym}(W)$. Man kann $-I$ benutzen, um die Grösse der Untergruppe $\mathrm{Sym}_+(W)$ zu verdoppeln.

Man schreibt

$$A = \mathrm{Sym}_+(W)$$

$$B = \{\pm I\} \cong \mathbb{Z}_2$$

$$C = \mathrm{Sym}(W).$$

Man will $\overset{24}{A} \times \overset{2}{B} = \overset{48}{C}$ zeigen.

Man beobachtet:

1) $-I \notin A$
2) Jedes OE Element von C kann als $-I$ mal ein OE Element (von A) geschrieben werden.

Es folgt:

(*) $A \cap B \underset{1)}{=} \{I\}$, $\quad AB \underset{2)}{=} C$

wobei

$$AB := \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

und dazu:

(**) Jedes Element von A kommutiert mit jedem Element von B.

Behauptung: (*) und (**) implizieren

$$A \times B = C \,. \quad \text{als Gruppen}$$

(Das genügt, um den Satz (b) zu beweisen.)

Beweis der Behauptung

Man definiert

A, B abelsch

$$\Phi : A \times B \to C$$

$$\Phi : (a,b) \mapsto ab$$

a) Φ ist ein Homomorphismus weil

$$\Phi((a,b))\,\Phi((a',b'))$$

$$= a b a' b'$$

$$= a a' b b' \qquad \text{wegen } (**)$$

kommutieren!

$$= \Phi((aa', bb'))$$

$(A \times B, \circ)$

$$= \Phi((a,b) \circ (a',b')) \qquad \checkmark$$

b) Φ ist injektiv, weil

$$\Phi((a,b)) = I$$

$$\Rightarrow \quad ab = I$$

$$\Rightarrow \quad b = a^{-1} \in A \cap B = \{I\}$$

$$\Rightarrow \quad (a,b) = \underbrace{(I, I)}_{\text{neutrales Element von } A \times B}$$

48=48

$\therefore$ bijektiv.

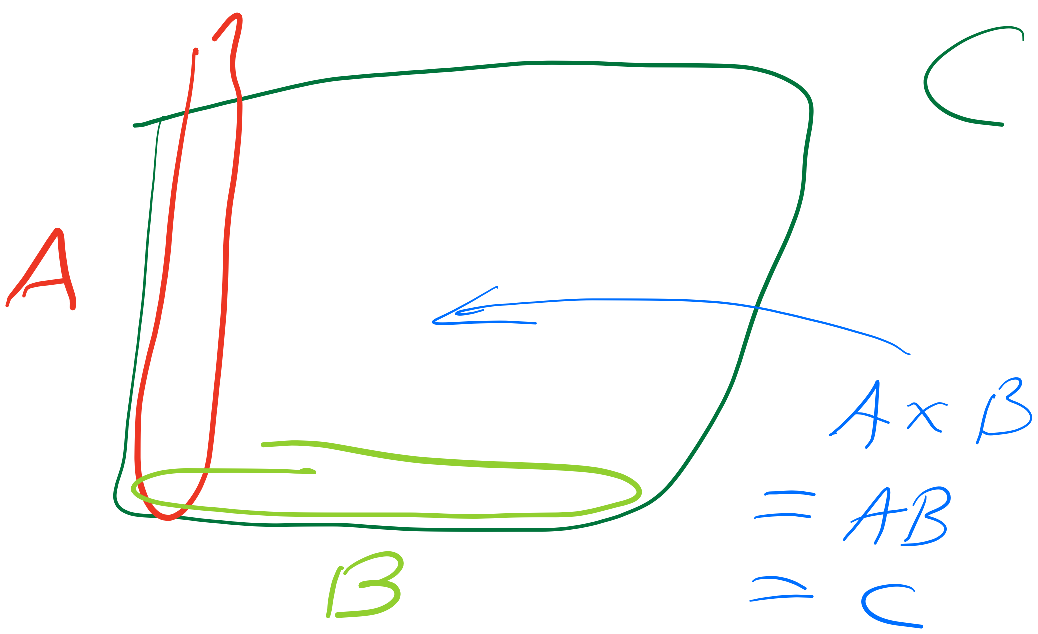
a) + b) $\Rightarrow$ Φ ist ein Isomorphismus. $A \times B \underset{\Phi}{\cong} C$

QED Behauptung, Satz.

Man nennt diese Art direkten Produkt | mit (*), (**), $A, B \subseteq C$.

Internes direktes Produkt, weil A und B Teilmengen von C sind.

Meistens schreibt man $=$ statt $\cong$ für ein internes direktes Produkt: $A \times B = C$.



Übung Warum haben wir nicht

$$\mathrm{Sym}(T) = \mathrm{Sym}_+(T) \times \{\pm I\}$$

??

Ikosaeder

(!)

$$\mathrm{Sym}(I) = \mathrm{Sym}_+(I) \times \{\pm I\}$$

$$\mathrm{Sym}(W) = \mathrm{Sym}_+(W) \times \{\pm I\}$$