Prüfung: Wahrscheinlich online.

Wir präsentieren die Bedingungen und Reglemente nächste Woche in der Vorlesung, auf der Webseite und per Email.

Es gibt eine technische Übung am Montag 4. Jan, wobei Sie den Anschluss zur Prüfung testen dürfen. DO NOT MISS THIS.

Abschnitt 39. Homomorphismen

Zur Erinnerung:

Seien G, H Gruppen. Ein **Homomorphismus** ist eine Abbildung

$$f : G \to H$$

mit

$$f(ab) = f(a)f(b) \quad \forall a, b \in G.$$

---

f erhält die Multiplikation, aber sie kann "vergessen" ein Teil der Struktur von G

Bsp Der kanonische Homomorphismus

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n, \qquad j \mapsto \underbrace{\bar{j}}_{j \bmod n}$$

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

<u>Behauptung</u> Sei

$$f : G \to H$$

ein Homomorphismus. Dann

$$f(e_G) = e_H \,, \quad f(a^{-1}) = f(a)^{-1}.$$

<u>Beweis</u> Wie bei den Isomorphismen.

<u>Def</u> Sei

$$f : G \to H$$

ein Homomorphismus. Der <u>Kern</u> von f ist die Teilmenge

$$\ker(f) := f^{-1}(e_H)$$
$$= \{ g \in G \mid f(g) = e_H \}$$

Beh. f ist injektiv

$\Longleftrightarrow \ker(f) = \{e_G\}$

Beweis ($\Longrightarrow$) Sofortig

($\Longleftarrow$) Nehme an, $\ker(f) = \{e_G\}$.

Dann

$$f(a) = f(b) \Longrightarrow f(a)f(b)^{-1} = e_H$$
$$\Longrightarrow f(ab^{-1}) = e_H$$
$$\Longrightarrow ab^{-1} \in \ker(f)$$
$$\Longrightarrow ab^{-1} = e_G$$
$$\Longrightarrow a = b$$

Also f ist injektiv.

QED

Bsp Ein Homomorphismus von

$$\mathrm{Sym}(\Delta) = D_3 = \{\overbrace{\underbrace{I, A, B}_{OE}}^{E}, \overbrace{\underbrace{1, 2, 3}_{OU}}^{U}\}$$

ist

$$\pi : \mathrm{Sym}(\Delta) \longrightarrow \{E, U\} \cong \mathbb{Z}_2$$

$$U^2 = E$$

gegeben durch

$$I, A, B \mapsto E, \qquad 1, 2, 3 \mapsto U.$$

Die Untergruppe der OE Symmetrien von $\mathrm{Sym}(\Delta)$ ist

$$\mathrm{Sym}_+(\Delta) = \ker(\pi)$$

$$= \{I, A, B\}$$

(Drehungen)

<u>Übung</u> Eine ähnliche Konstruktion funktioniert bei D_n. Man hat

$$\# D_n = 2n$$

$$(D_n)_+ = \ker(\pi) = \underbrace{C_n}_{\text{Drehungen}}$$

$$\# C_n = n$$

$$\pi : \overbrace{\underbrace{\underset{OE}{\overset{n}{\{1, a, \dots, a^{n-1}}}}_{C_n}, \underset{OU}{\overset{n}{b, ba, \dots, ba^{n-1}\}}}}^{D_n} \to \{E, U\}.$$

Orientierungshomomorphismus.

Die beiden obigen Beispiele sind dem Orientierungshomomorphismus zurückzuführen.

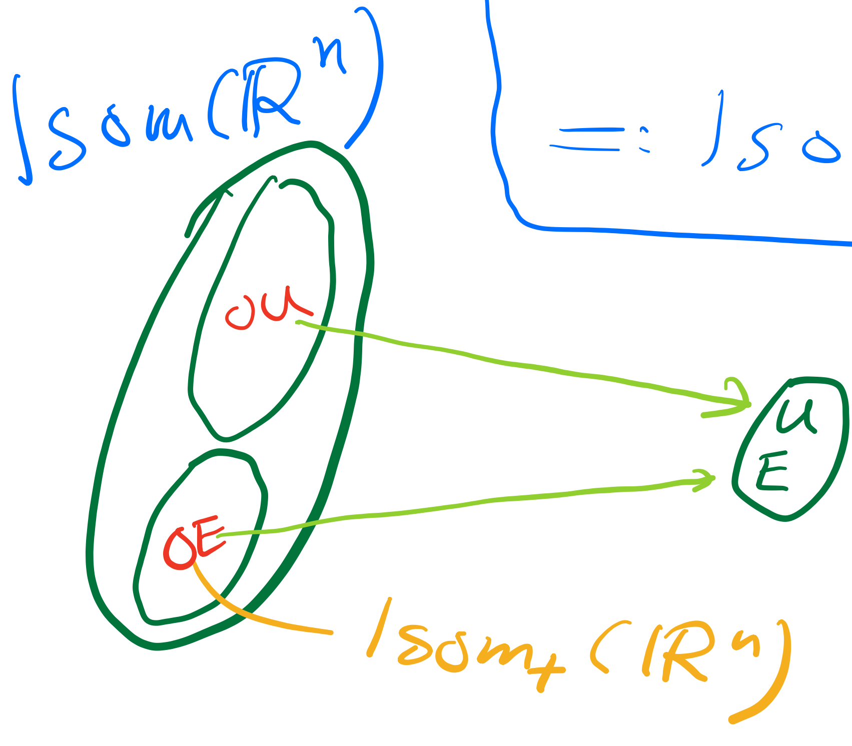
$$\pi : \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \{E, U\}$$

$$U^2 = E$$

mit

$$\ker(\pi) = \{\phi \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^n) : \phi \text{ ist } OE\}$$

$$=: \operatorname{Isom}_+(\mathbb{R}^n)$$



Untergruppen und Homomorphismen

Erinnerung: $\operatorname{im}(f) = f(G) = \{ f(g) \mid g \in G \}$

Beh. Sei

$$f : G \to H$$

ein Homomorphismus. Dann

(a) $\ker(f)$ ist eine Untergruppe von G

(b) $\operatorname{im}(f)$ ist eine Untergruppe von H.

Beweis

(a) Wir zeigen: $\ker(f)$ ist eine Untergruppe.

Erstens ist $\ker(f) \neq \emptyset$.

Wir zeigen nun: $\ker(f)$ ist abgeschlossen bez. Mult und Inv.

1) $a, b \in \ker(f)$

$\Longrightarrow f(a) = f(b) = e_H$

$\Longrightarrow f(ab) = f(a) f(b) = e_H e_H = e_H$

$\Longrightarrow ab \in \ker(f)$ abgeschlossen bez. Mult

2) $a \in \ker(f)$

$\Longrightarrow f(a) = e_H$

$\Longrightarrow f(a^{-1}) = f(a)^{-1} = e_H$

$\Longrightarrow a^{-1} \in \ker(f)$. abgeschlossen bez. Inv.

Also ist $\ker(f)$ eine Untergruppe.

(b) Der Beweis, dass $\mathrm{im}(f)$ auch eine Untergruppe ist, ist ähnlich. Siehe Skript.

QED

Folgende Übung generalisiert das, das wir gerade bewiesen haben.

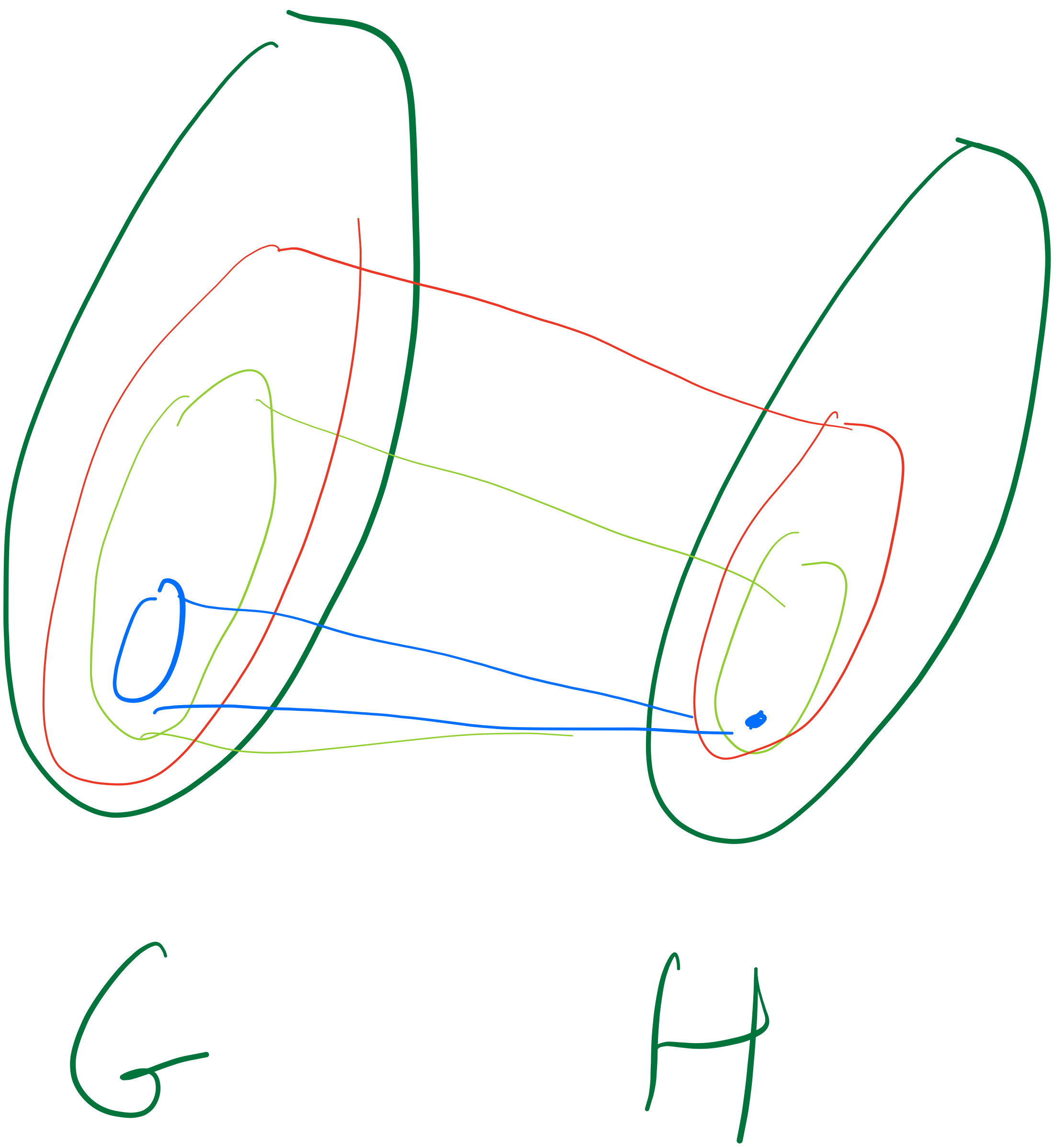
<u>Übung</u> Sei $f: G \to H$ Homomorphismus

(a) A eine Untergruppe von G

$\Longrightarrow f(A)$ eine Untergruppe von H

(b) B eine Untergruppe von H

$\Longrightarrow f^{-1}(B)$ eine Untergruppe von G.



Die Untergruppen von G,
die ker(f) enthalten,
entsprechen genau den
Untergruppen von H, die
in im(f) liegen. 1-zu-1

Abschnitt 40 Der Kern ist normal

Skizze Sei:

$$f: G \to H$$

ein Homomorphismus. Sei

$$N = \ker(f).$$

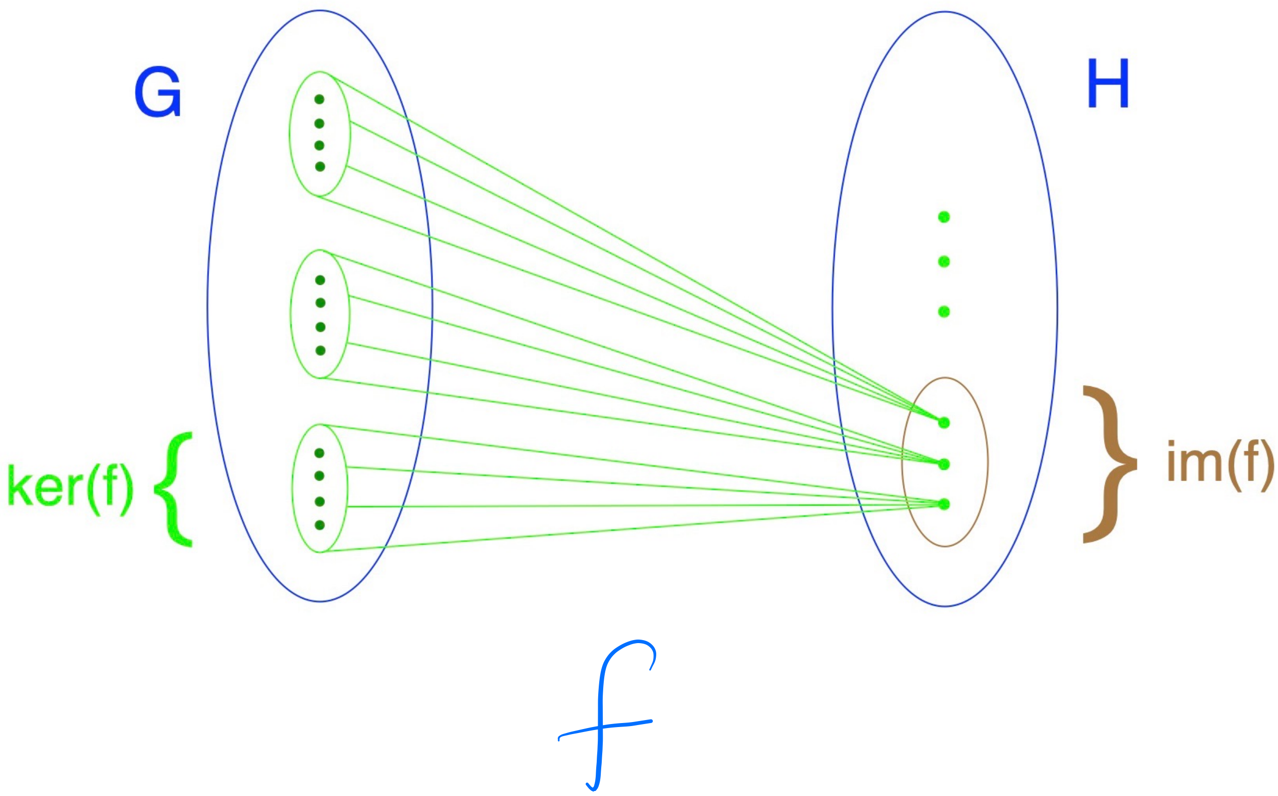
Der Kern hat folgende wunderbare Eigenschaft:

$$cN = Nc \qquad \forall c \in G.$$

So eine Untergruppe heisst **normal**. Wir zeigen auch, dass die Nebenklassen vom Kern genau die Urbilder von Elementen von H sind:

$$cN = Nc = f^{-1}(u)$$

wobei $u \in H$. Es folgt davon, dass alle Urbilder $f^{-1}(u)$ derselben Grösse sind (wenn nicht leer)



Ausführung

Def Sei G eine Gruppe, $N \leq G$ eine Untergruppe.
N heisst normal in G falls

$$cNc^{-1} = N$$

oder äquivalent

$$cN = Nc$$

für alle $c \in G$.

"c kommutiert mit N"

Also N ist konjugiert zu keinen anderen Untergruppe.

Die beiden Versionen der Definition sind äquivalent durch die Bijektionen R_c und $R_{c^{-1}}$

Intuitiv gesagt ist N "erkennbar" auch wenn man die Elemente von G durch eine Konjugation durchmischt. N kann nicht durch innere Automorphismen deplaziert werden.

<u>Hauptsatz</u> Der Kern ist normal.

<u>Beweis</u> Sei $a \in N$, $c \in G$. Wir zeigen: $cac^{-1} \in N$. Man rechnet

$$f(cac^{-1}) = f(c)f(a)f(c^{-1})$$

$$= f(c)\, e_H\, f(c)^{-1}$$

$$= e_H$$

Also

$$c a c^{-1} \in N \qquad \forall a \in N$$

Also

$$c N c^{-1} \subseteq N \qquad \forall c \in G$$

Also

$$N \subseteq c^{-1} N c \qquad \forall c \in G$$

Also

$$N \subseteq c N c^{-1} \qquad \forall c \in G$$

Also

$$c N c^{-1} = N$$

Also

N ist normal.

QED

Als Nächstes zeigen wir, dass die Nebenklassen des Kerns die Urbilder der Elemente von H sind.

<u>Satz</u> Sei

$$f : G \to H$$

ein Homomorphismus. Sei

$$N = \ker(f).$$

Dann

$$cN = Nc = f^{-1}(u)$$

mit $u = f(c)$. Also ist jedes Urbild $f^{-1}(u)$ eine Nebenklasse von N oder leer.

Beweis Sei $c \in G$. Setze $u := f(c)$. Dann

$$x \in cN \iff c^{-1}x \in N$$
$$\iff f(c^{-1}x) = e_H$$
$$\iff f(x) = f(c) = u$$
$$\iff x \in f^{-1}(u)$$

Also

$$cN = f^{-1}(u).$$

QED

Korollar Alle nichtleere Urbilder $f^{-1}(u)$ sind der gleichen Grösse als $\ker(f)$.

Beweis ✓

Abschnitt 41 Eigenschaften normaler Untergruppen

Man schreibt

$$N \trianglelefteq G$$

falls N normal in G ist.

Bsp $\{e\}$ und G sind immer normal in G

Bsp Jede Untergruppe einer abelschen Gruppe ist normal.

Bsp In $D_3 = \{I, A, B, 1, 2, 3\}$ sind

$\{I, A, B\}$ normal

$\{I, 1\}, \{I, 2\}, \{I, 3\}$ nicht normal

Beh. Der Schnitt einer beliebigen Familie

$$\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

normaler Untergruppen von G ist wieder normal in G:

$\bigcap_{\alpha \in A} N_\alpha$ ist normal in G

Beweis Leicht.

__Übung__ Seien $A \leq B \leq C$

(a) Falls

$$A \leq B, \quad B \leq C$$

Zeigen Sie

$$A \leq C$$

(b) Finden Sie ein Beispiel, wo

$$A \trianglelefteq B, \quad B \trianglelefteq C$$

aber

$$A \ntrianglelefteq C.$$

Suchen Sie in $\mathrm{Sym}(W)$,

$S_4 = \mathrm{Sym}_+(W)$, $A_4 = \mathrm{Sym}_+(T) \leq S_4$

__Übung__ Sei

$$f: G \to H$$

ein Homomorphismus.

(a) Man zeigt: Das Urbild einer normalen Untergruppe von H ist eine normale Untergruppe von G

(b) Ist das Bild einer normalen Untergruppe von G immer eine normale Untergruppe von H? Was kann schief gehen? Was ist, wenn f surjektiv ist?

Abschnitt 42 Quotientengruppen

Wir haben gesehen, dass ein Homomorphismus

$$f: G \longrightarrow H$$

ergibt eine normale Untergruppe

$$N = \ker(f).$$

In diesem Abschnitt erfahren wir die Umkehrung: jede normale Untergruppe

$$N \trianglelefteq G$$

kann als der Kern eines Homomorphismus f von G zu einer Gruppe H realisiert werden.

Falls der Homomorphismus surjektiv ist, so ist die Bildgruppe H eindeutig bestimmt bis auf Isomorphismus.

Die Idee: Man arrangiert die Nebenklassen von N sodass sie eine Gruppe bilden!

Das wird erleichtert dadurch, dass für eine normale Untergruppe die Linksklassen und Rechtsklassen überein-stimmen:

$$gN = Ng \qquad g \in G.$$

Satz Seien

G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$,

(a) $\exists$ eine Gruppe, die <u>Quotientengruppe</u> <u>von G</u> <u>durch N</u>, die man mit

$$G/N$$

bezeichnet, und einen surjektiven Homomorphismus

$$f: G \to G/N$$

mit

$$N = \ker(f).$$

N ist als Kern von f realisiert.

(b) Falls

$$f : G \to A$$

$$g : G \to B$$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"'] & \cdot \arrow[d, "x"] \\ \cdot \arrow[r, "x"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

surjektive Homomorphismen sind mit gleichem Kern

$$\ker(f) = \ker(g),$$

dann gibt es einen (eindeutigen) Isomorphismus

$$h : A \xrightarrow{\cong} B$$

sodass

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & A \arrow[d, "\cong"', "h"] \\ & B \end{tikzcd}$$

$h \circ f = g$

kommutiert.

Das heisst,

$$g = h \circ f.$$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \cdot \arrow[d, "h"] \\ & \cdot \end{tikzcd}$$

<u>Bsp</u> $H = \{I, A, B\}$ ist normal

in $D_3 = \{I, A, B, 1, 2, 3\}$

und

$$D_3/H = \{[I], [1]\}$$
$$\cong \mathbb{Z}_2$$

Wir haben $[x]$ geschrieben für die Nebenklasse xH.

Also $[I] = \{I, A, B\}$

$[1] = \{1, 2, 3\}$.

Die Nebenklassen von H sind die Elementen von D_3/H.

H $1H$

$\circ$	I	A	B	1	2	3
I	I	A	B	1	2	3
A	A	B	I	3	1	2
B	B	I	A	2	3	1
1	1	2	3	I	A	B
2	2	3	1	B	I	A
3	3	1	2	A	B	I

H $1H$

D_3

$\longrightarrow$

$\circ$	$[I]$	$[1]$
$[I]$	$[I]$	$[1]$
$[1]$	$[1]$	$[I]$

D_3/H

$\trianglelefteq \mathbb{Z}$

Bsp $n\mathbb{Z} = \{\text{Vielfachen von } n\}$

$= \{\ldots, -2n, -n, 0, n, 2n, \ldots\}$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], \ldots, [n-1]\}$

$= \mathbb{Z}_n$

Hier ist $[k]$ die Nebenklasse

$k + n\mathbb{Z}, \qquad k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Beweis von Satz (a)

1. Man definiert G/H als die Nebenklassen

$$H, gH, \dots \qquad g \in G$$

Man schreibt

$$[g] := gH$$

Man erinnert sich daran, das die Nebenklassen $[g]$ nicht anders als Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation

$$g \sim g' \iff g = g'h \quad \exists h \in H$$

Man definiert die Multiplikation in

$$G/H := \{[g] : g \in G\}$$

durch

$$[a][b] := [ab]$$

für Nebenklassen $[a],[b] \in G/H$.

Um zu sehen, dass dieses wohldefiniert ist, müssen wir zeigen:

(+) $a \sim a',\ b \sim b' \Rightarrow ab \sim a'b'$

Also nehme an:

$$a \sim a', \qquad b \sim b'.$$

Das heisst

$$a = a'h, \qquad b = b'k$$

wobei $h, k \in H$. Dann

$$ab = a'h\, b'k$$

Aber

$$h b' = b' \tilde{h}$$

für ein $\tilde{h} \in H$, weil

$$Hb' = b'H$$

(H ist normal).

Dann

$$ab = a'h\, b'k$$
$$= a'b'\underbrace{\tilde{h} k}_{\in H}$$

Aber

$$\tilde{h} k \in H$$

Also

$$ab \sim a'b'$$

Also $$[ab] = [a'b']$$

Also $$[ab]$$
ist wohl definiert.

$$[a][b] = [ab] = [a'b'] = [a'][b']$$

Also

$$[a][b]$$

ist wohldefiniert, unabhängig vom Vertreter.

2. Es ist jetzt <u>trivial</u> die Gruppenaxiomen bei

$$(G/H, \cdot)$$

zu verifizieren, mit

$$[g]^{-1} := [g^{-1}], \quad e_{G/H} := [e_G] = H$$

Also die Menge

(1) $G/H = \{[g] : g \in G\}$

mit der Multiplikation

(2) $[a][b] := [ab]$

ist eine wohldefinierte Gruppe.

3. Man verifiziert:

$$\begin{aligned} G &\to G/H \\ g &\mapsto [g] \end{aligned}$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

aus (1)

aus (2)

QED Satz (a) -