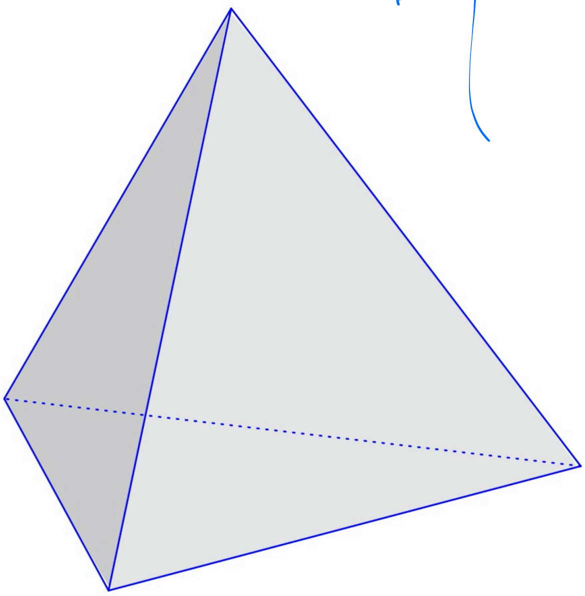
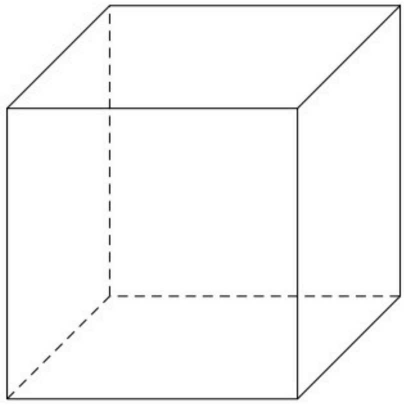
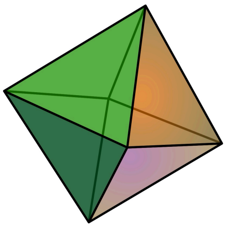
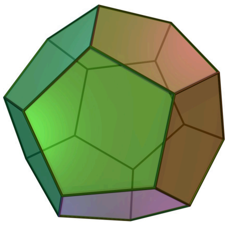
T

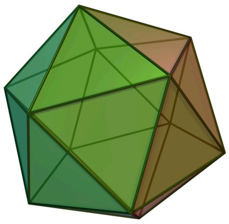


W







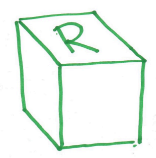


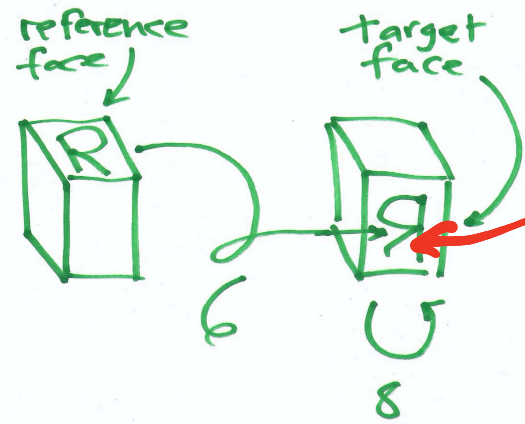
O

D

I

Wie viel Symmetrien hat der Würfel?





Ziel facette

Symmetrien des Würfels

= (# Zielfacetten) · (# Symmetrien der Zielfacette)

$$= 6 \cdot 8 = \underline{\underline{48}}$$

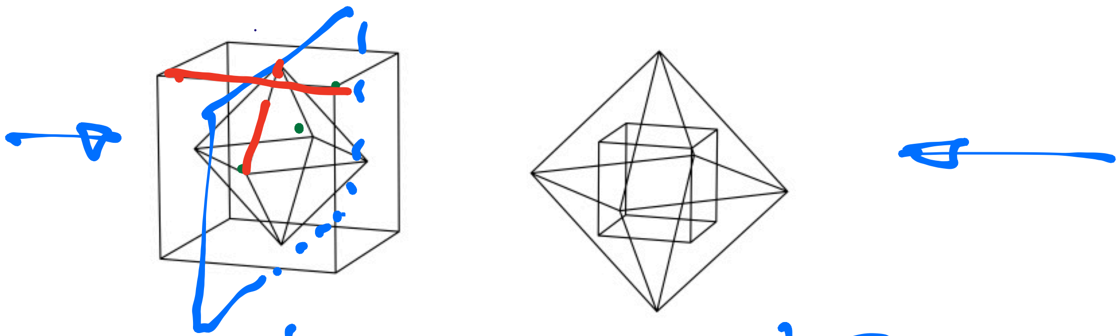
Frage: Berechne die Anzahl Symmetrien aller Platonischen Körpern.

W	O	T	D	I
48	48	24	120	120

!

Es stellt sich heraus: Der Würfel und der Oktaeder haben die selben Symmetrien!

(wenn man den Oktaeder richtig plaziert)

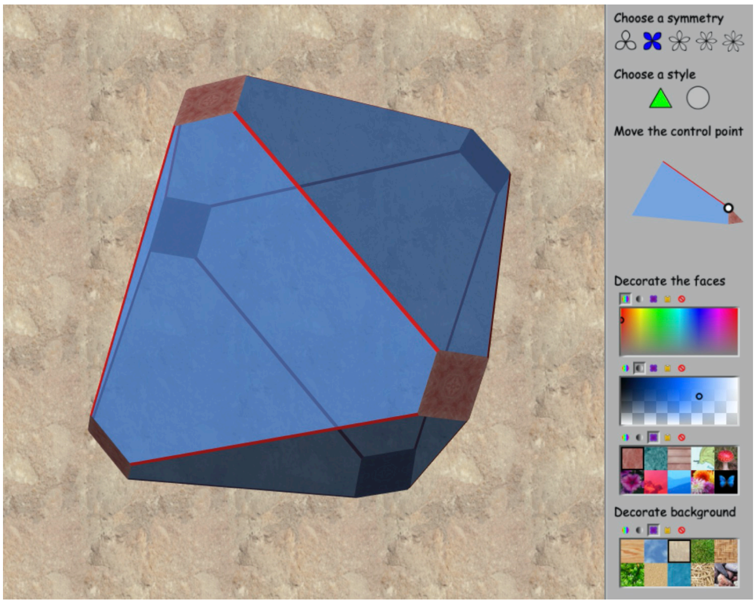


einbeschriebe Körper

$$\mathrm{Sym}(W) = \mathrm{Sym}(O)$$

Der Würful und das Oktaeder sind dvale Polyeder.

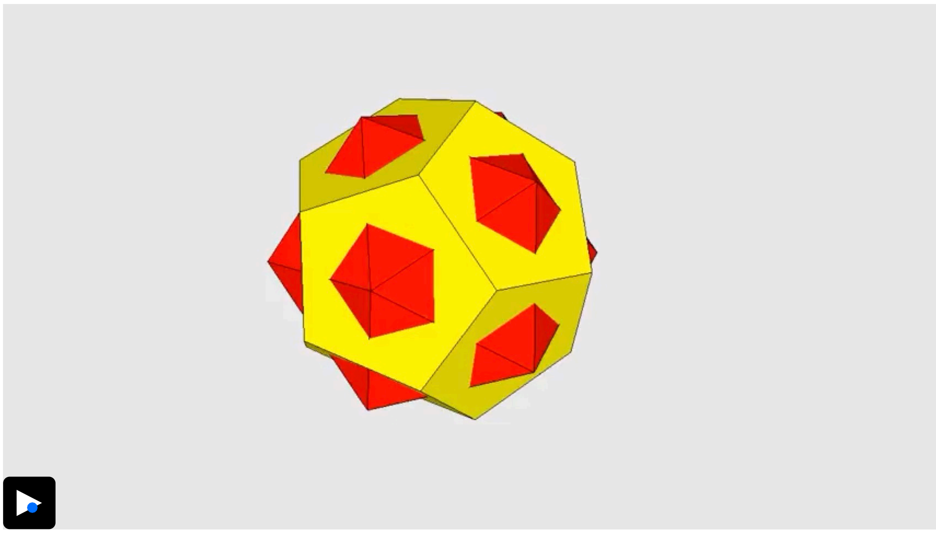
cube	faces	edges	vertices	
	6..	12 ..	8 ..	
	vertices	edges	faces	octahedron



http://www.geometrygames.org/KaleidoTile

Das Ikosaeder und das Dodekaeder sind auch dual zueinander.

https://www.youtube.com/watch?

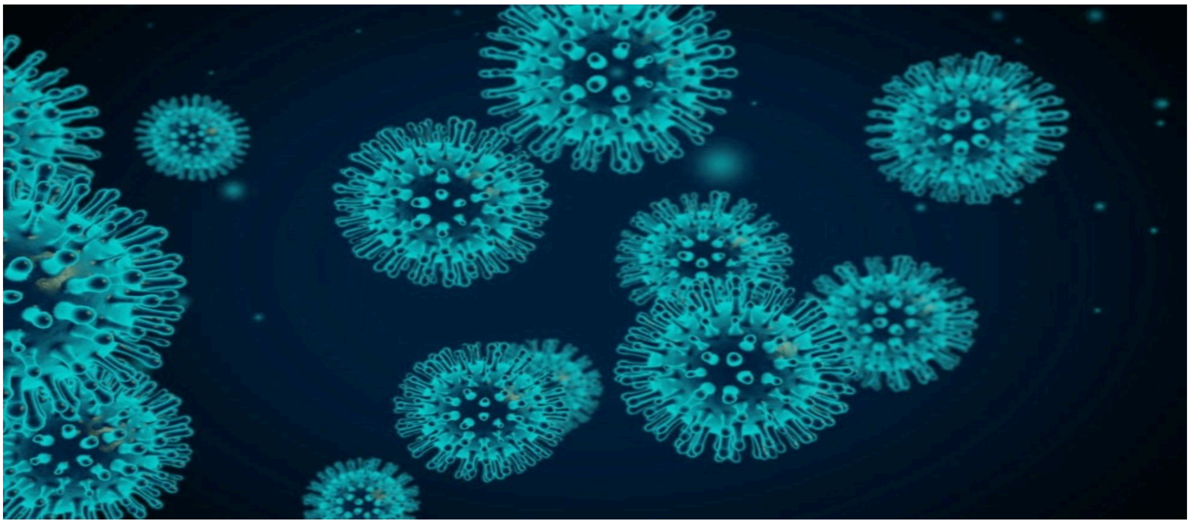


dodecahedron	faces	edges	vertices	
	12	30	20	
	vertices	edges	faces	icosahedron

Was ist das Dual des Tetraeders?

Antwort: sich selbst.

Tet	E	K	F
	4	6	4
	F	K	E	Tet



Brieskorn I,

S. 16-17

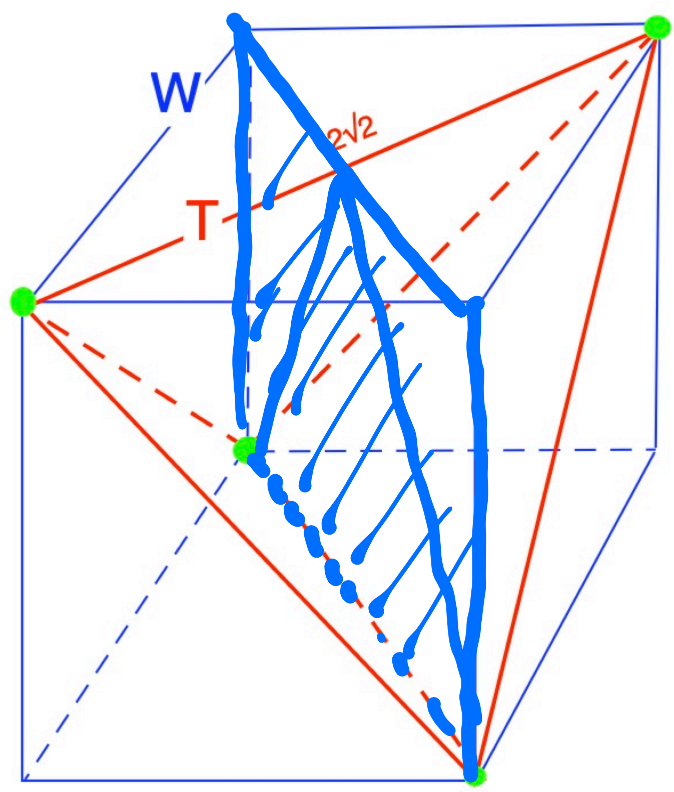
alles erklärt über

ikosaedrische

Viren.

Abschnitt 7

Einbeschriebene Körper



Ein Tetraeder im Würfel

Jede Symmetrie des Tetraeders ist auch eine Symmetrie des Würfels.

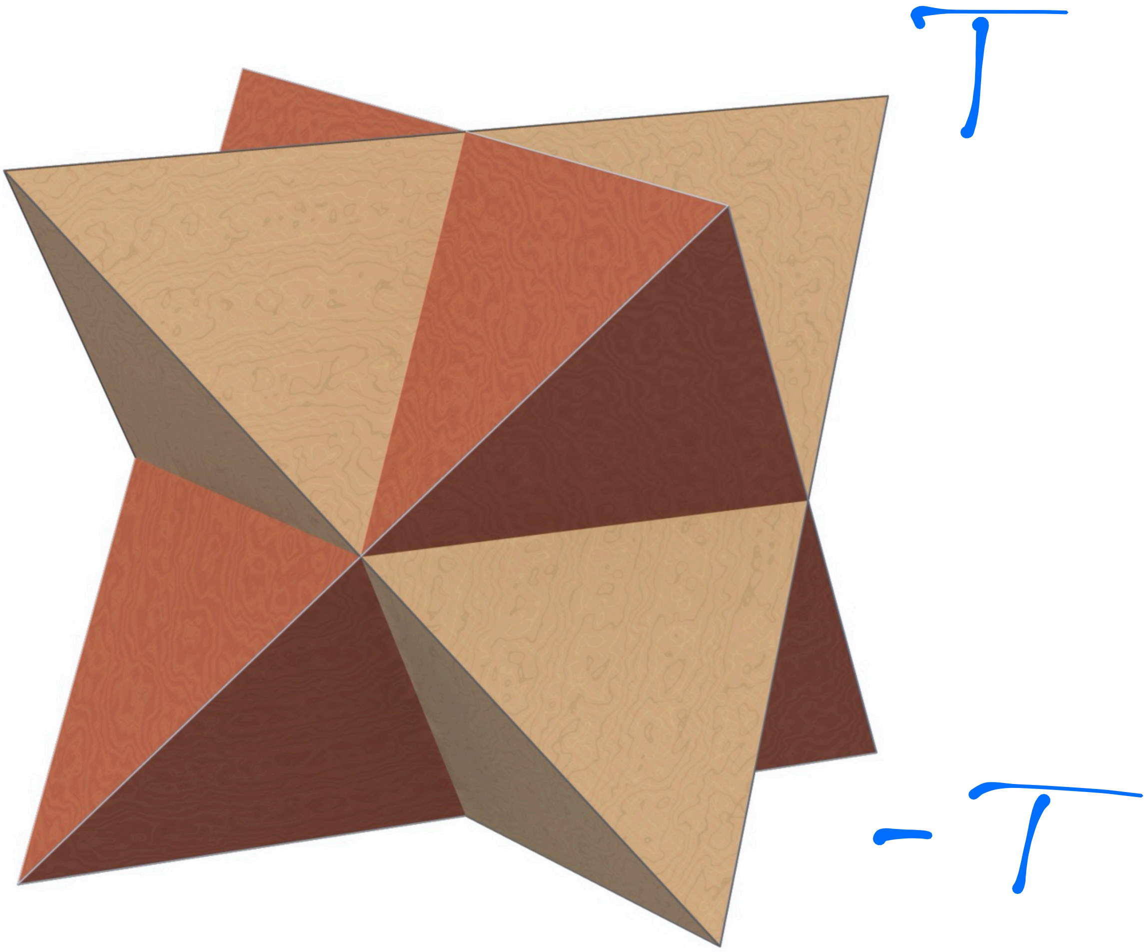
$$\overset{24}{\mathrm{Sym}(T)} \subseteq \overset{48}{\mathrm{Sym}(W)}$$

$$= \mathrm{Sym}(O)$$

Antipodal map

= Spiegelung durch den Nullpunkt

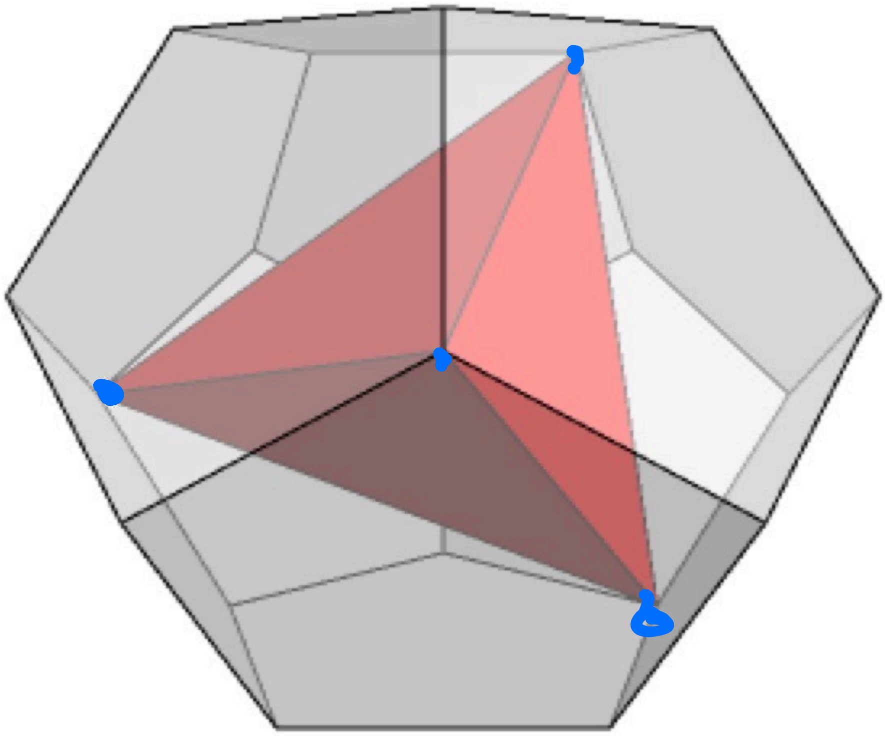
$$x \longmapsto -x$$



$$Z(x) = -x$$

$$Z(T) = -T$$

"Gegentetraeder"



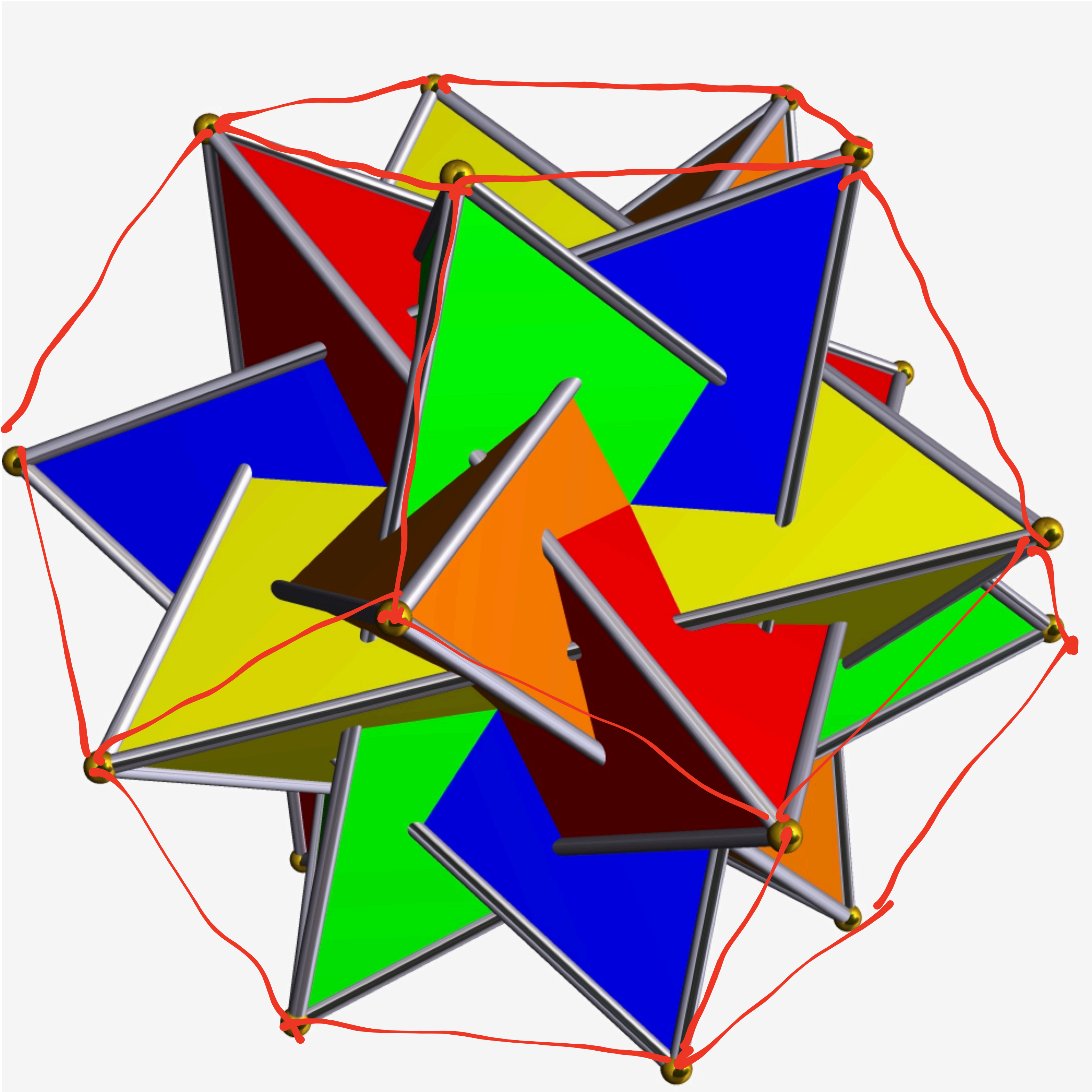
Ein Tetraeder
im Dodekaeder

Es gibt sogar
5 Tetraeder
im Dodekaeder

mit disjunkten Ecken.

(Die 20 Ecken des Dodekaeders teilen sich in 5 Gruppen von 4 Ecken.)

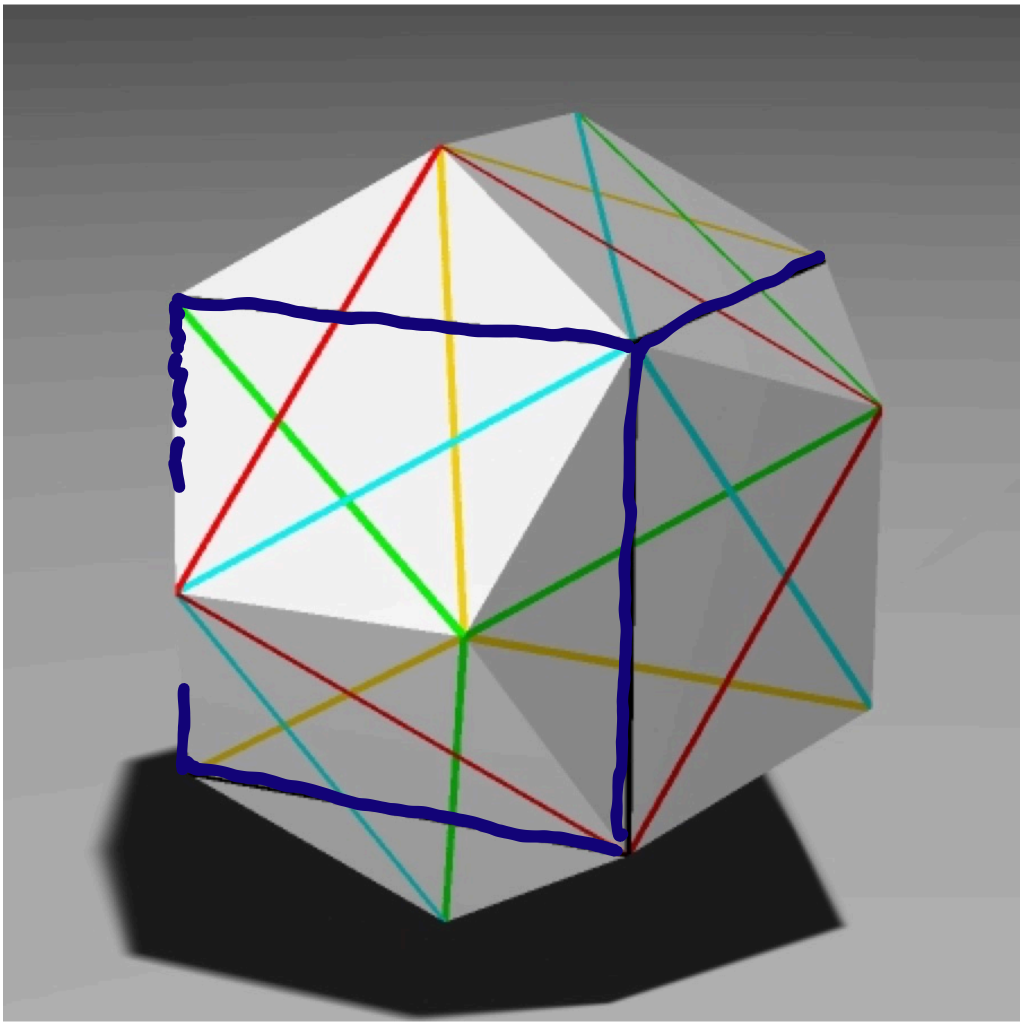
5 Tetraeder
im Dodekaeder



D. h.

$$\mathrm{Sym}(T) \subseteq \mathrm{Sym}(D)$$
$$= \mathrm{Sym}(I)$$

sogar auf 5 verschiedene Weisen

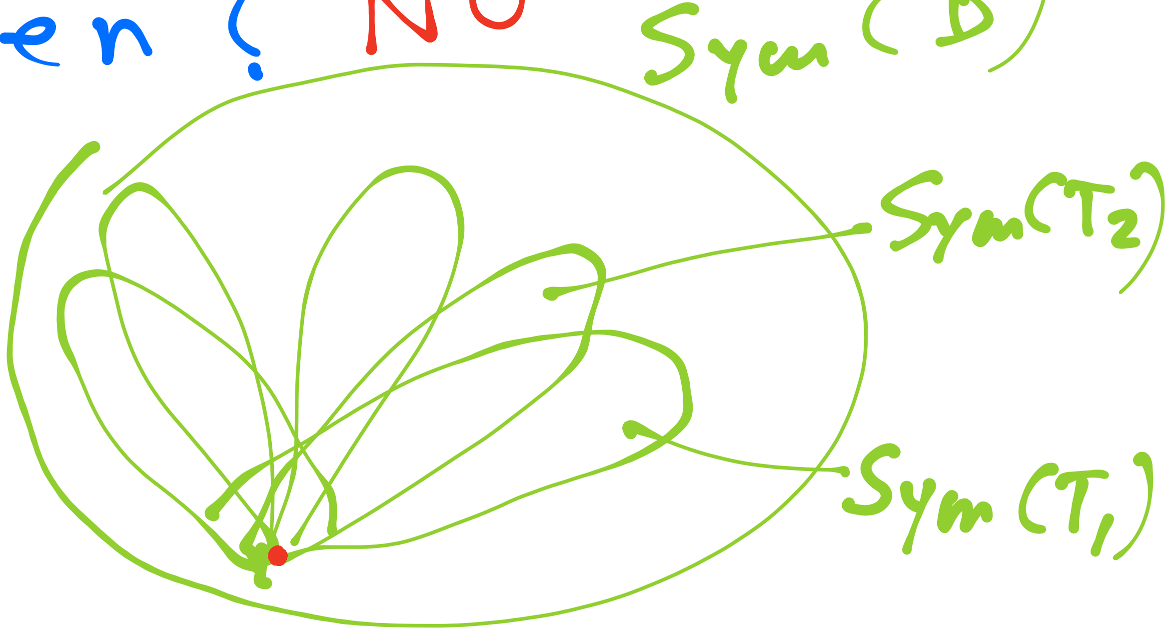


5 Würfel im
Dodekaeder.
Jeder Würfel hat
2 Tetraeder
= 10 Tetraeder
im Dodekaeder

Es gibt 10 Tetraeder im Dodekaeder. Heisst das, dass

$$\mathrm{Sym}(T) \subseteq \mathrm{Sym}(D)$$

auf 10 verschiedene Weisen? NO



Frage:

Der Würfel sitzt im Dodekaeder.

Heisst das, dass

$$\mathrm{Sym}(W) \subseteq \mathrm{Sym}(D)$$

?

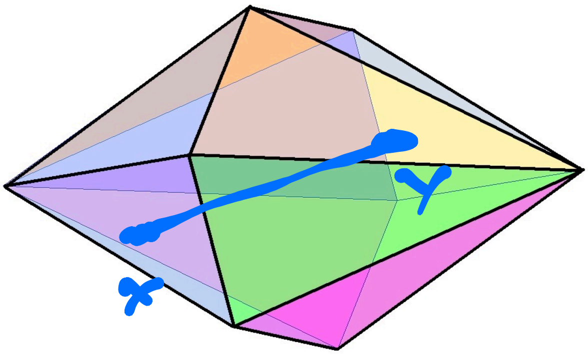
Zu Hause

Abschnitt 8

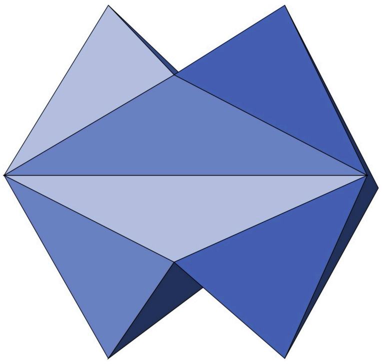
Satz Die regulären Polyeder in $\mathbb{R}^3$ sind genau die 5 Platonischen Körper.

Klassifizierung

Polyeder

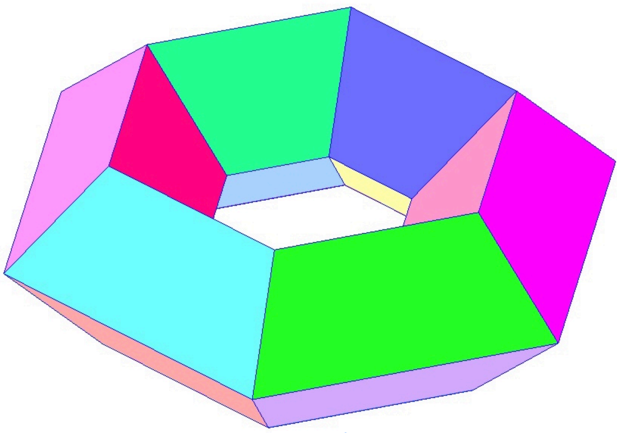


convex



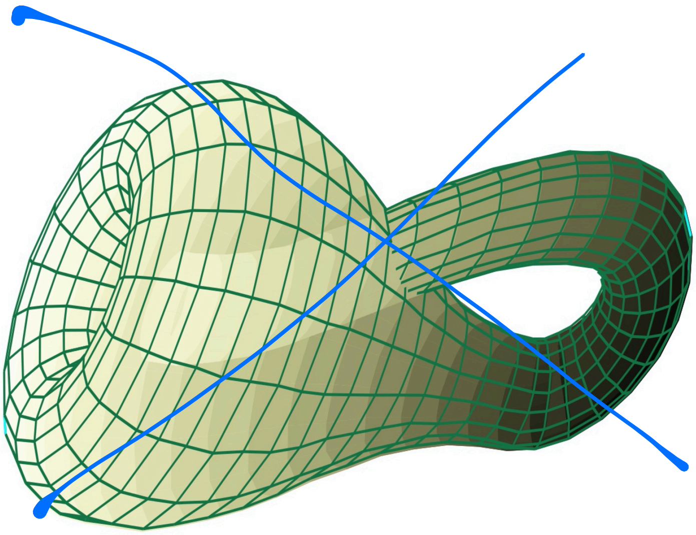
nicht konvex

einfach zusa-
mmen hängend



nicht konvex
nicht einfach
zusammen-
hängend

Zusammenhängend



schneidet
sich
kein Polyed
er

Def. Ein reguläres Polyeder ist ein Polyeder, sodass die Symmetrien nehmen

- Jeder Eck zu jedem Eck
- Jede Kante zu jeder Kante
- Jede Facette zu jeder Facette

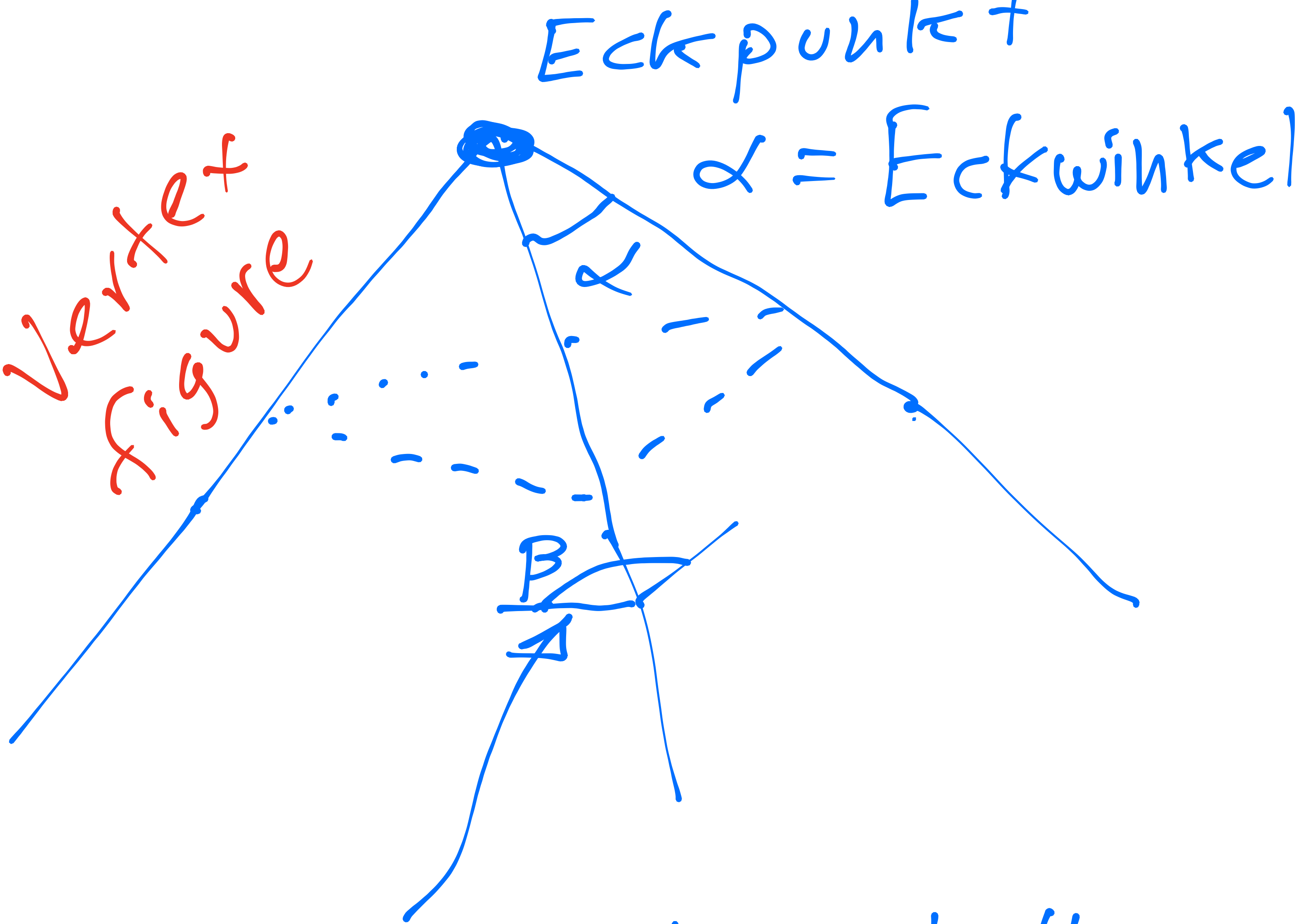
Und

- Jede Facette ist ein reguläres n-Eck

Folgen der Definition:

- Die Ecken haben alle dieselben Grad (= Anzahl Kanten zu dem Eck).

- Die Kanten haben alle dieselbe Länge und "dihedral angle"

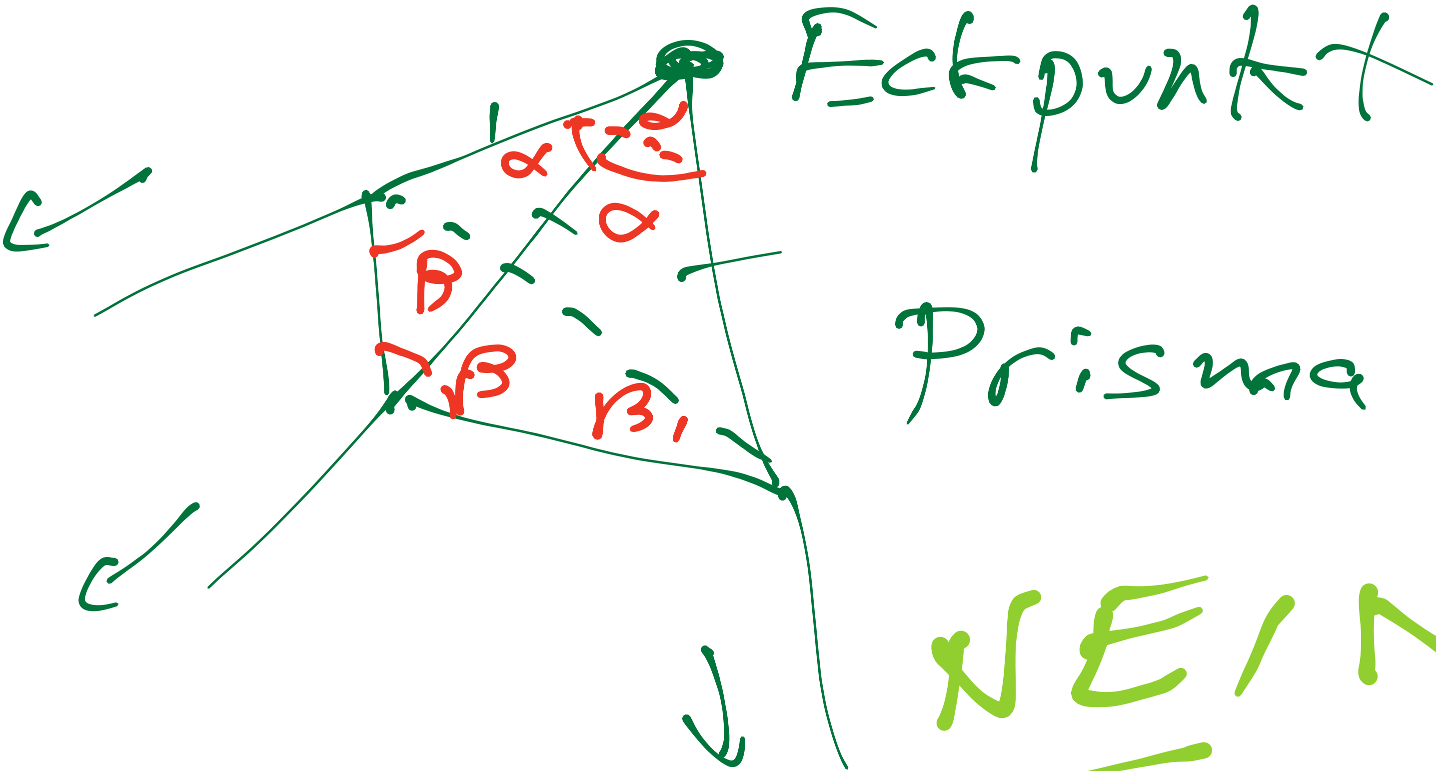


"dihedral angle" β
(Diederwinkel)

- Die Facetten haben alle dieselben Anzahl Seiten.

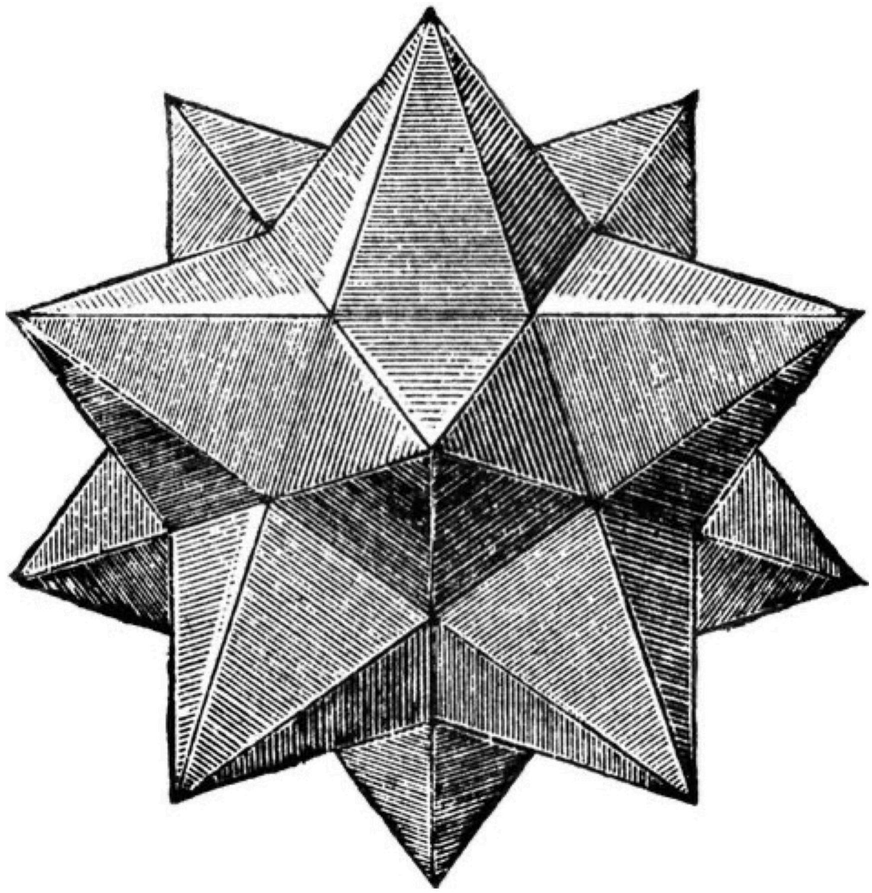
- Alle Eckwinkel α sind gleich

• Alle "Vertex figures" sind regulär (und gleich)

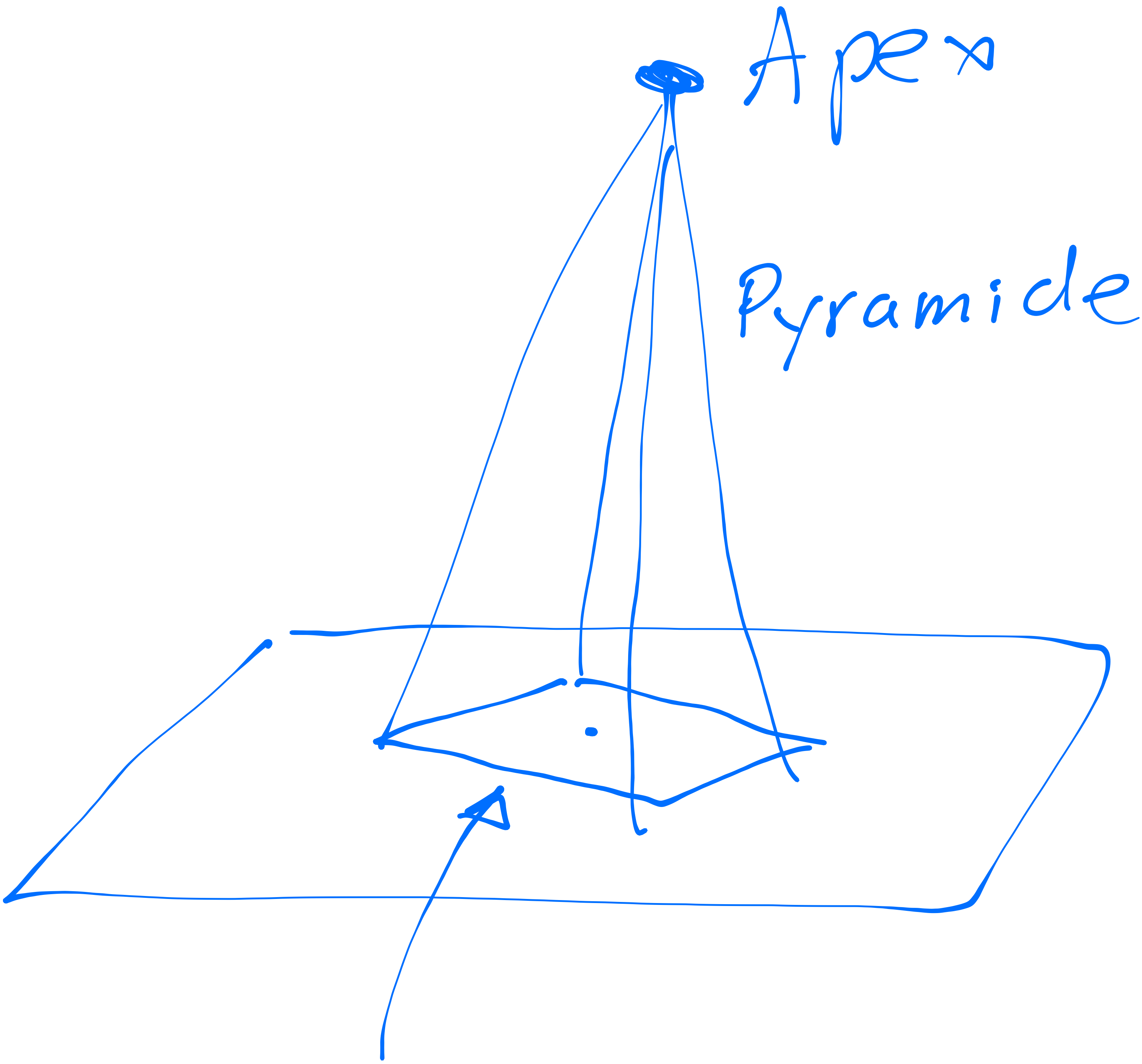


~~Scheitelpunktfigur~~ NEIN

Eckpunktfigur? JA



Frage: Warum ist dieses Polyeder nicht ein reguläres Polyeder nach unserer Definition?



Basis oder

Grundfläche

der Pyramide