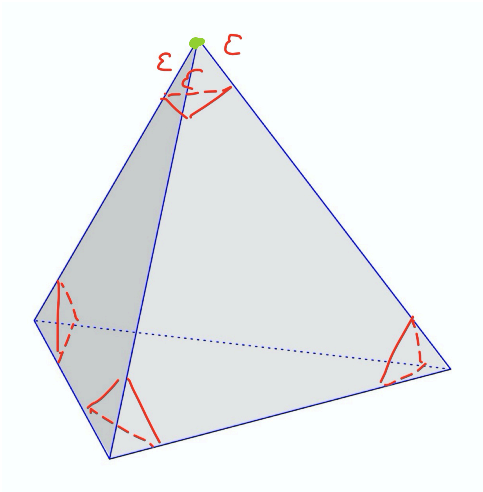
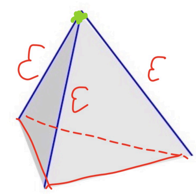
Meldungen

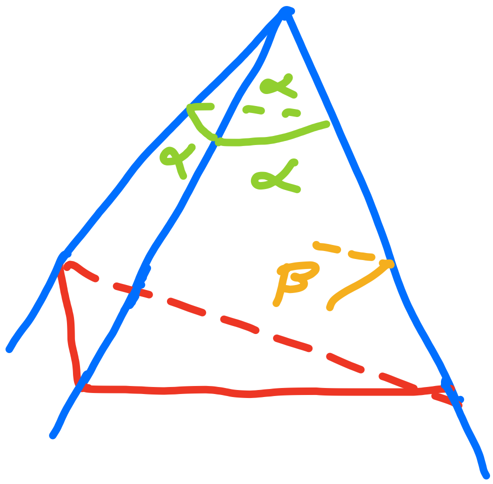
- Freitags 16.00 Fragestunde

- ~~Scheitelpunktfigur~~ ✗
  Eckpunktfigur ✓





Eckpunktfigur
("vertex figure")



α = Eckwinkel

β = Dieder-
winkel

Sei S ein reguläres Polyeder

- Alle Eckwinkel α sind gleich
- Alle Diederwinkel β sind gleich

Seien

$k :=$ Anzahl Seiten einer Facette

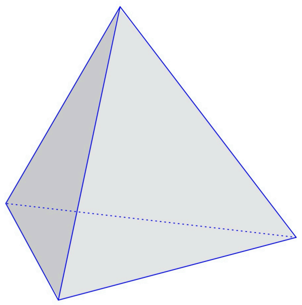
$\ell :=$ Grad eines Eckpunktes

- Alle k sind gleich
- Alle ℓ sind gleich

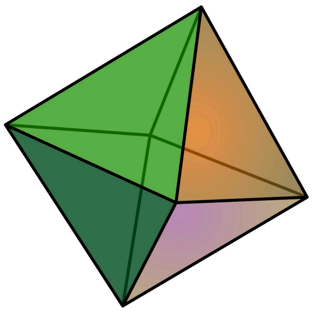
Das Paar

$$(k, \ell)$$

heisst <u>Schläfli-Symbol</u> des regulären Polyeders. S.

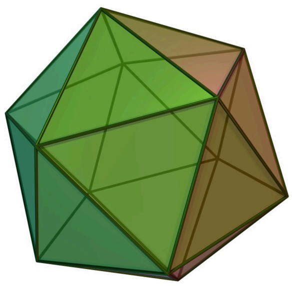


$(3,3)$

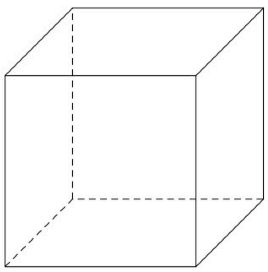


$(3,4)$

dual

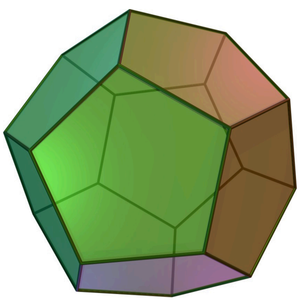


$(3,5)$



$(4,3)$

dual



$(5,3)$

Satz Die regulären Polyeder sind genau die Platonischen Körper.

Beweis 3 schritte:

1) Existenz der platonischen Körper (Konstruktion) – siehe Coxeter S. 5-6

2) Eindeutigkeit der platonischen Körper – zu jedem (k,ℓ) gibt es höchstens ein reguläres Polyeder

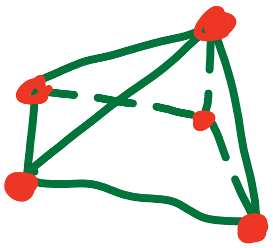
3) Keine anderen Schläfli-Symbole (ausser den obigen fünf) sind möglich.

<u>Zu 2):</u>

Das Paar (k, ℓ) bestimmt die Geometrie von S, wie folgt:

Wir müssen ℓ reguläre k-Ecken um jeden Eckpunkt haben. Da die Eckpunkt-figuren alle gleich sind, gibt es nur eine Weise, wie man das machen

Kann.



$k=3, \ \ell=4$

Also bestimmt (k,ℓ) die Positionen der benachbarten Eckpunkten. Man setzt diese Konstruktion fort um das ganze Polyeder herum. Dadurch ist das ganze Polyeder S durch (k,ℓ) eindeutig bestimmt.

Warnung: nicht konstruiert!

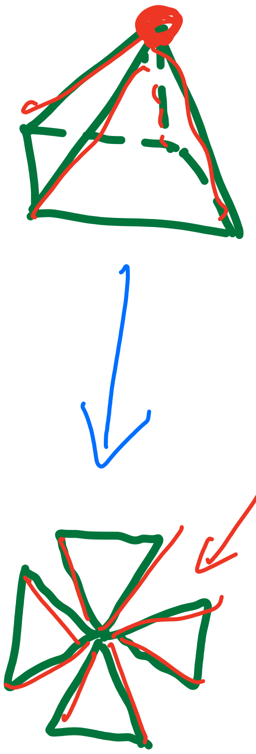
Also für jedes (k, e)
unter
$(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)$
ist das entsprechende S
ein platonischer Körper.
QED 2)

Zu 3): Diese Schritt
ist am interessantesten.

Die Eckpunktfiguren
sind identische reguläre
Pyramide, die durch
(k, e) charakterisiert
sind:

$$k = 3, \quad \ell = 4$$

konvex



Lücke

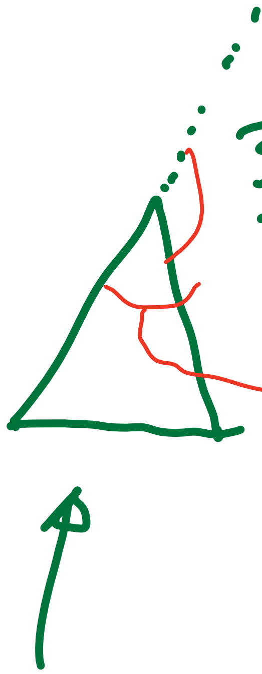
$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i < 360$$

Alle α_i sind gleich α, also

$$\ell \alpha < 360$$

Aber

$$\alpha = 180 - \frac{360}{k}$$



$\frac{360}{k}$ Aussenwinkel

Innenwinkel $= 180 - \frac{360}{k}$

$k = 3$

Also $l\alpha < 360$ wird

$$l\left(180 - \frac{360}{k}\right) < 360$$

$$180 - \frac{360}{k} < \frac{360}{l}$$

$$\boxed{1 < \frac{2}{k} + \frac{2}{l}}$$

$$\boxed{1 < \frac{2}{k} + \frac{2}{l}} \quad (*)$$

Aber

$$\boxed{k \geqq 3, \qquad l \geqq 3} \quad (**)$$

Und: Die einzigen Lösungen von $(*)$ und $(**)$ sind:

$(3,3), (3,4), (3,5),$
$(4,3), (5,3).$

QED 3) QED Satz.

Abschnitt 9

Reguläre Figuren
in höheren Dimensionen.
Schön! Überraschend!

<u>Polytop</u>: Verallgemeinerung
eines Polyeders in $\mathbb{R}^n$:
Hat Eckpunkte, 2-Facetten,
3-Facetten, ..., $(n-1)$-
Facetten. (= "Facetten")

Reguläres Polytop: S

Ein Polytop, so dass die Symmetrien erfüllen:

1) Jede Facette (d.h. $(n-1)$-dimensionale Seite von S) geht zu jeder anderen durch eine Symmetrie

2) Jede Symmetrie einer Facette von S kann erweitert werden zu einer Symmetrie von S.

H. S. M. Coxeter,

Regular Polytopes.

Bsp

- n - Würfel (Hyperwürfel)

Ecken

$n = 3$ $(\pm 1, \pm 1, \pm 1) \in \mathbb{R}^3$

8 Eckpunkte

$n = 4$ $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1) \in \mathbb{R}^4$

16 Eckpunkte

n $\underbrace{(\pm 1, \ldots, \pm 1)}_{n\text{-mal}} \in \mathbb{R}^n$

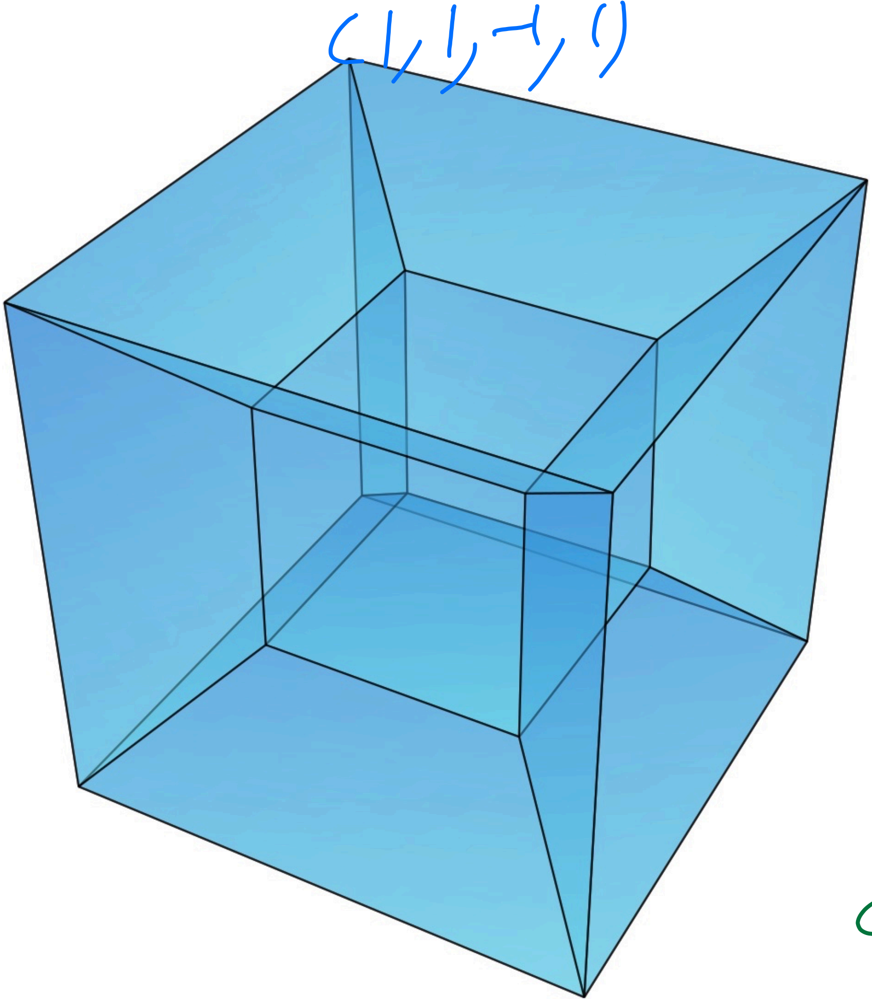
- n-Orthoplex

$n=3$ Oktaeder

6 Eckpunkte: $(\pm 1, 0, 0)$
$(0, \pm 1, 0)$
$(0, 0, \pm 1)$

n $(\pm 1, 0, \dots, 0)$
$(0, \pm 1, 0, \dots, 0)$
$\vdots$
$(0, \dots\dots, 0, \pm 1) \in \mathbb{R}^n$

$2n$ Eckpunkte

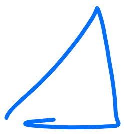


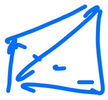
Übung:
Gib die Koordinaten jedes Eckpunktes des Bildes an.

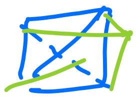
Bild des 4-Würfels, projiziert auf $\mathbb{R}^3$.

- n - Simplex

Verallgemeinerung des Tetraeders

$n = 2$  3 Eckpunkte

$n = 3$  4 Eckpunkte

$n = 4$  5 Eckpunkte

n $n+1$ Eckpunkte

Alle Kanten sollen gleich lang sein (z.B. Lange $= 1$)

$\mathbb{R}^4 \quad (n=4)$

Es gibt 3 weitere reguläre 4-Polytope S

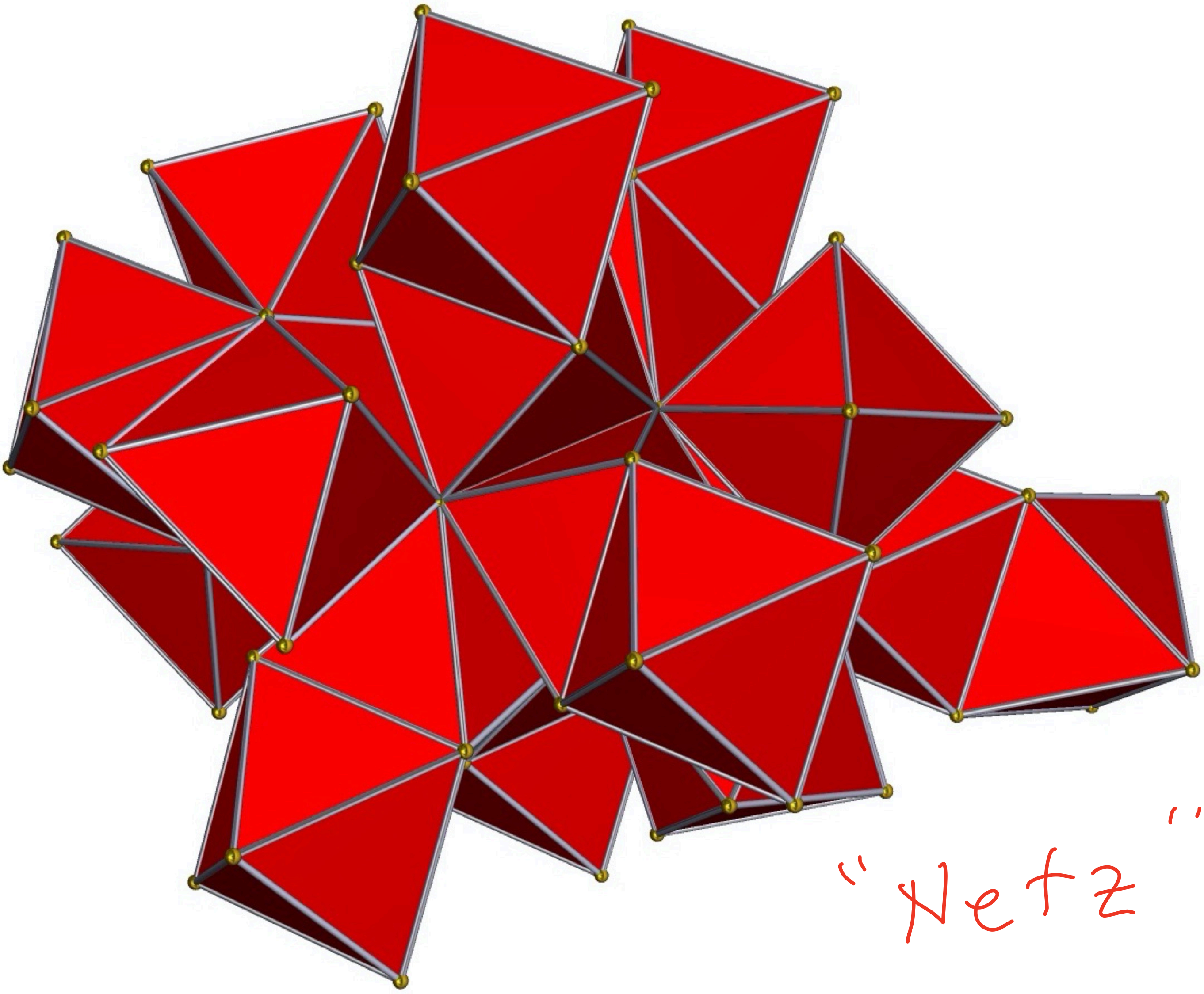
- 24-cell

24 Oktaeder als Facetten (3-dim)

96 2-Facetten (Dreiecke)

96 1-Facetten (Kanten)

24 0-Facetten (Eckpunkte)



"Netz"

Die 24 Oktaeder des 24-Cell, geschnitten von einander und flach gemacht in $\mathbb{R}^3$

- 120-Cell

  120 Dodekaeder
  als Facetten

  720 2-Facetten

  1200 Kanten

  600 Eckpunkte

- 600-Cell

600 Tetraeder als Facetten

1200 2-Facetten

720 Kanten

120 Eckpunkten

Siehe bitte Wikipedia.

Satz

- In $\mathbb{R}^4$, die reguläre 4-Polytope sind 4-Würfel, 4-Orthoplex, 4-Simplex, 24-Cell, 120-cell, 600-Cell
- In $\mathbb{R}^n$, $n \geq 5$ die reguläre n-Polytope sind n-Würfel, n-Orthoplex n-Simplex.

d.h. es ist in hohen Dimensionen nicht komplizierter, sondern <u>einfacher</u> als in $\mathbb{R}^4$.

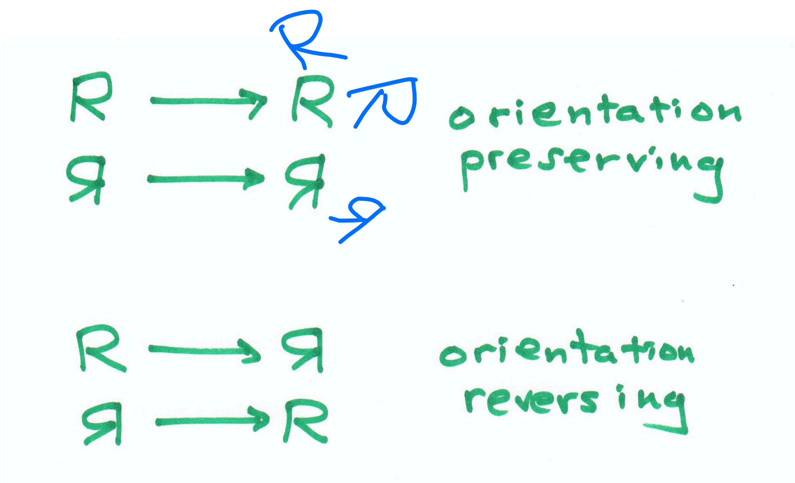
!!

Abschnitt 8

Orientierung

Sei $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie.

Wir nennen ϕ **orientierungsumkehrend** (OU), wenn ϕ ein Spiegeleffekt hat. Wir nennen ϕ **orientierungserhaltend** (OE), wenn ϕ kein Spiegeleffekt hat.



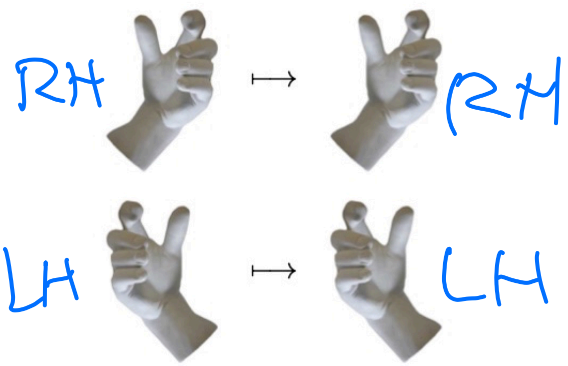
(OE)

(OU)

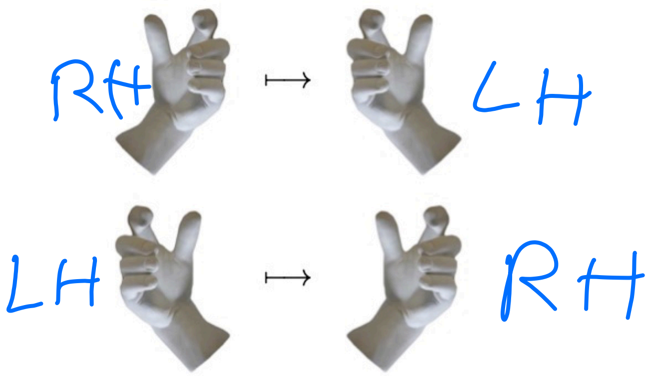
Sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Isometrie.

ϕ heisst OE, wenn ϕ rechte Hände zu rechten Händen und linken Händen zu linken Händen nimmt.

ϕ heisst OU, wenn ϕ rechte Hände zu linken Händen und linke Hände zu rechten Händen nimmt.



OE



OU

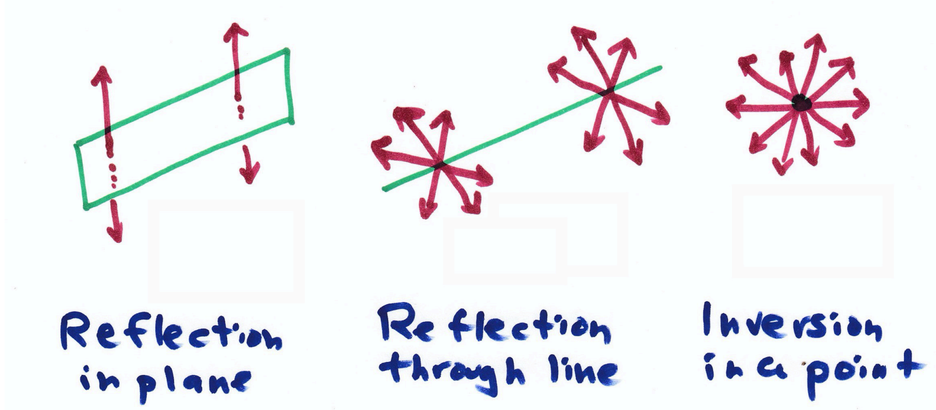
Beispiele

- Drehungen sind OE

- Eine Spiegelung in einer Geraden in $\mathbb{R}^2$ is <u>OU</u>

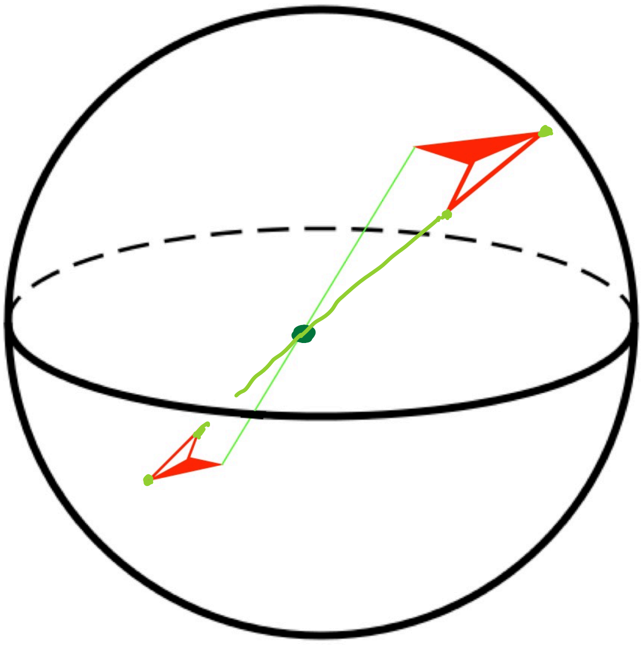
- Eine Inversion in einem Punkt in $\mathbb{R}^2$ (= 180 Drehung um den Punkt) ist <u>OE</u>

$\mathbb{R}^3$



OU OE OU

- Eine Spiegelung in einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ ist <u>OU</u>
- Eine Spiegelung in einer Geraden (= 180 Drehung um die Gerade) in $\mathbb{R}^3$ ist <u>OE</u>
- Eine Inversion in einem Punkt in $\mathbb{R}^3$ ist <u>OU</u>



$\mathbb{R}^3$

Inversion durch den Ursprung.

OU

Figure 1.11 The hands of Erasmus of Rotterdam by Holbein, 1523.

d.h. falsch.

Frage: Was ist los in diesem Bild?

Burns-Glaser
"Space Groups for Solid-State Scientists", S. 15

Kristallographie

Komposition-Regeln

$$OE \circ OE = OE$$

Hintereinanderschaltung oder Komposition der beiden Isometrien

$$OE \circ OU = OU$$

$$OU \circ OE = OU$$

$$OU \circ OU = OE$$

$\circ$	E	U
E	E	U
U	U	E

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) :=$$

$$\{\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \phi \text{ ist eine Isometrie}\}$$

$$\mathrm{Isom}_+(\mathbb{R}^n) :=$$

$$\{\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) : \phi \text{ OE ist}\}$$

(die Hälfte von $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$)

A = eine Menge Isometrien von $\mathbb{R}^n$

$$A_+ := A \cap \mathrm{Isom}_+(\mathbb{R}^n)$$