T. Hutton

http://timhutton.github.io/hyperplay

$k=3$, α = Eckwinkel $= 60^\circ$ fest

(Dreiecke $\triangle$)

β = Diederwinkel variert

ℓ = Grad variert (!)

($\ell \notin \mathbb{N}$!)

Hyperplay

Abschnitt II

Fixpunkte

Def (a) x heisst *Fixpunkt* der Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, falls

$$\phi(x) = x .$$

(b) Die *Fixpunktmenge* von ϕ ist

$$\mathrm{Fix}(\phi) := \{ x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = x \}$$

Typischer Fixpunkt:

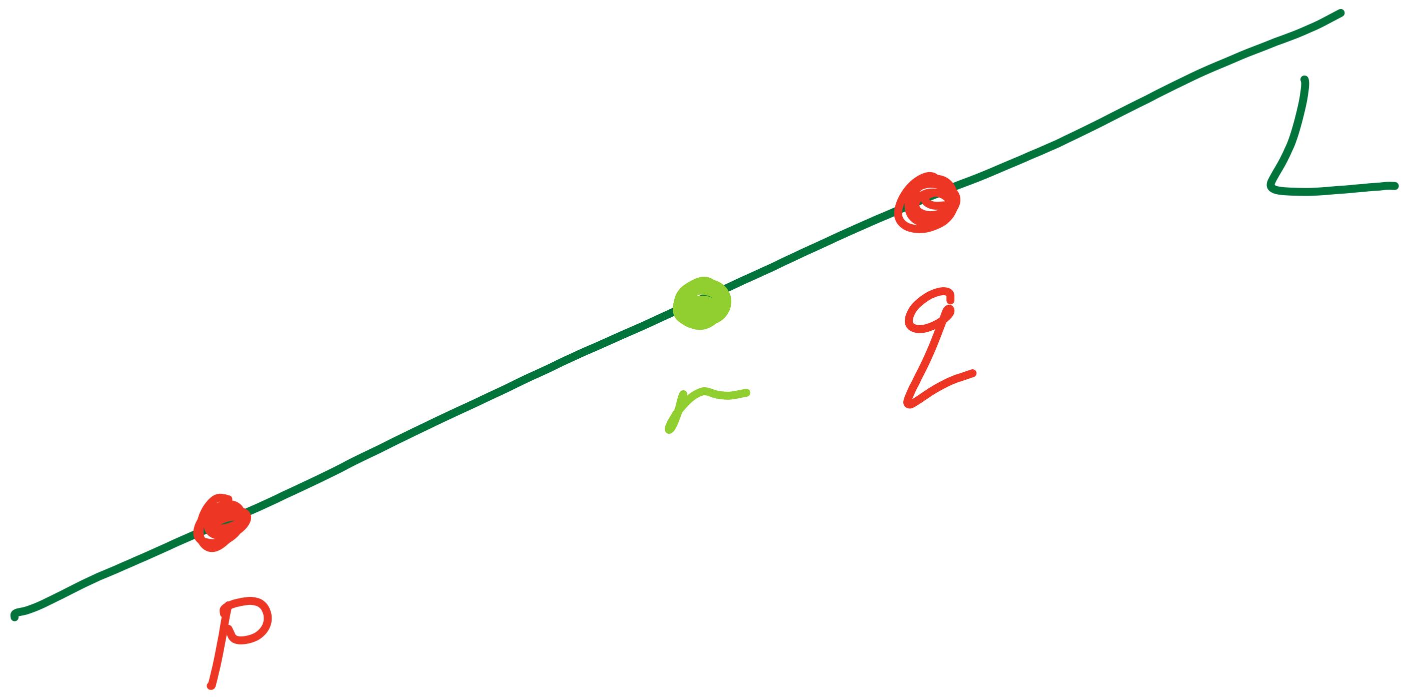
Bsp Drehungen und Spiegelungen haben Fixpunkte, Translationen nicht.

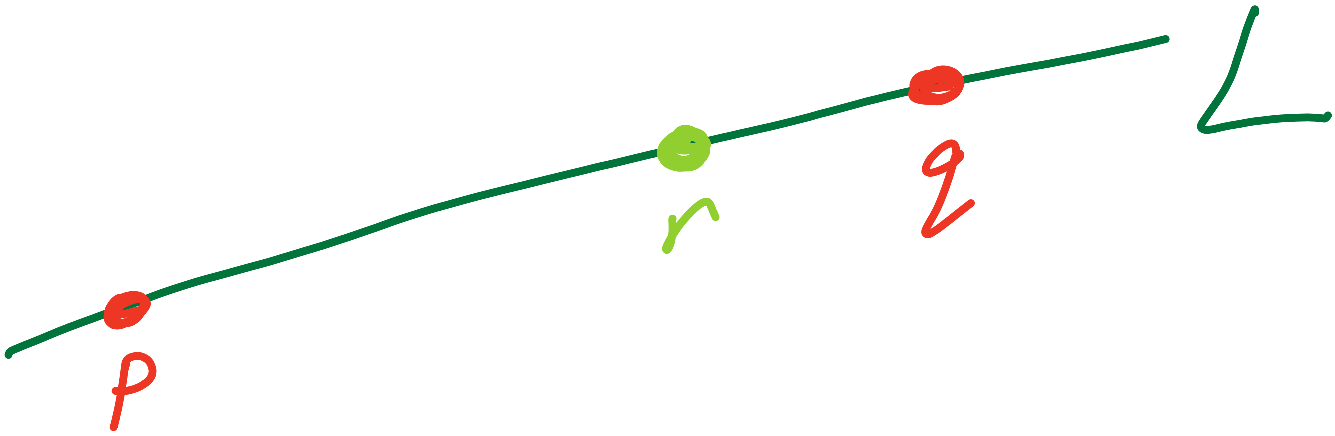
Behauptung Die Fixpunktmenge einer Isometrie von $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ ist leer, ein Punkt, eine Gerade, eine Ebene, oder der ganze Raum.

(Die sind genau die affinen Unterräume von $\mathbb{R}^2$ bzw $\mathbb{R}^3$.)

Wir brauchen

<u>Lemma</u> Seien $p \neq q$ Fixpunkte von ϕ. Sei L die Gerade, die durch p, q bestimmt ist. Dann ist jeder Punkt r auf L ein Fixpunkt von ϕ.

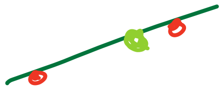




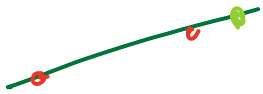
Beweis: 3 Schritte

1. L besteht aus genau den Punkten r, wobei die Dreiecksungleichung eine Gleichung ist, d.h. entweder

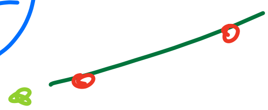
$$d(p,r)+d(r,q)=d(p,q)$$



$$d(p,q)+d(q,r)=d(p,r)$$



$$d(q,p)+d(p,r)=d(q,r)$$

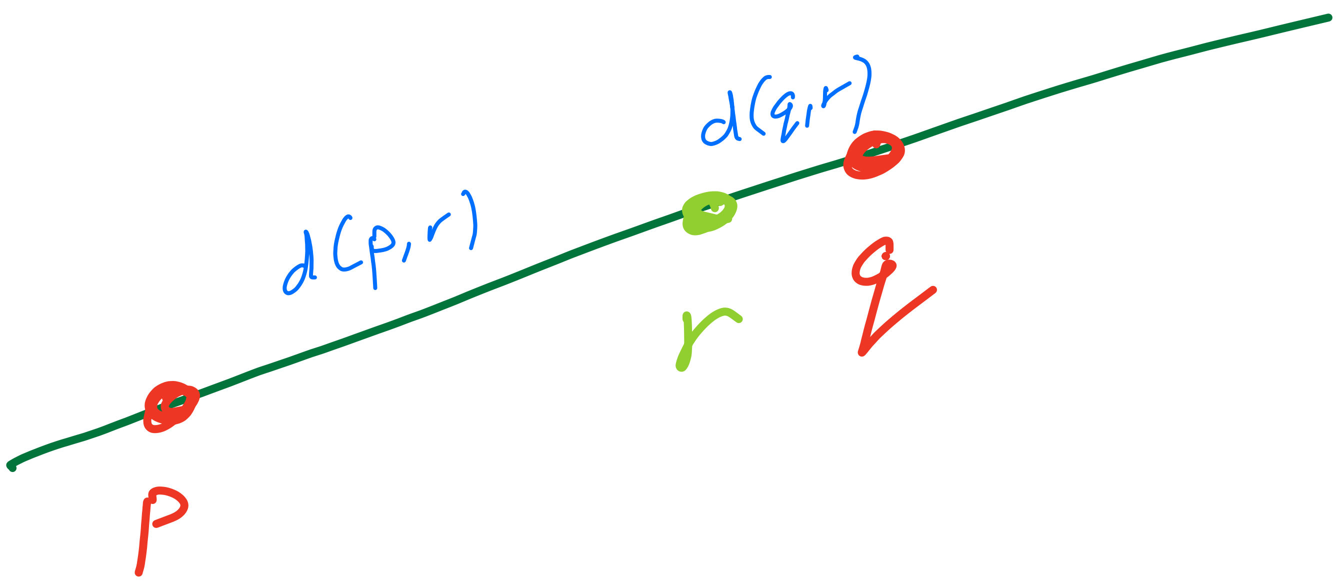


Aber $\phi(p)=p$ und $\phi(q)=q$

Also $\boxed{\phi(L)=L}$.

2. Sei $r \in L$. Die Position von r entlang L ist eindeutig bestimmt durch die zwei Zahlen

$$d(p,r) \quad , \quad d(q,r)$$



3. Sei $r \in L$. Dann ist

$\phi(r) \in \phi(L) = L$.

Nach 2. ist r durch

$$d(r,p), \quad d(r,q)$$

bestimmt, und $\phi(r)$ durch

$$d(\phi(r),p), \quad d(\phi(r),q)$$

bestimmt. Aber p, q sind Fixpunkte und ϕ eine Isometrie, also

$$d(\phi(r),p) = d(\phi(r),\phi(p)) = d(r,p)$$

$$d(\phi(r),q) = \quad \cdots \quad = d(r,q)$$

Also

$$\phi(r) = r$$

d.h. $\boxed{r \text{ ist ein Fixpunkt von } \phi}$

Also L besteht aus Fixpunkten von ϕ. QED Lemma

Zur Erinnerung:

<u>Behauptung</u> Die Fixpunktmenge einer Isometrie ϕ von $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ ist entweder

$\emptyset$, Punkt, Gerade, Ebene, Raum.

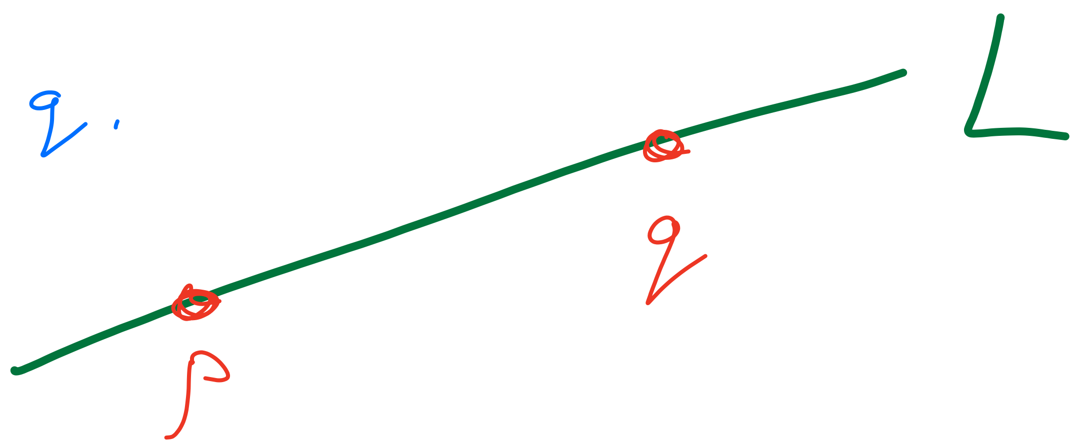
<u>Beweis</u> Fälle für $\mathrm{Fix}(\phi)$:

<u>Fall 1.</u> $\emptyset$ fertig

<u>Fall 2.</u> Ein Punkt fertig

<u>Sonst:</u> $\exists\, p \neq q \in \mathrm{Fix}(\phi)$

Sei L die Gerade durch p, q.

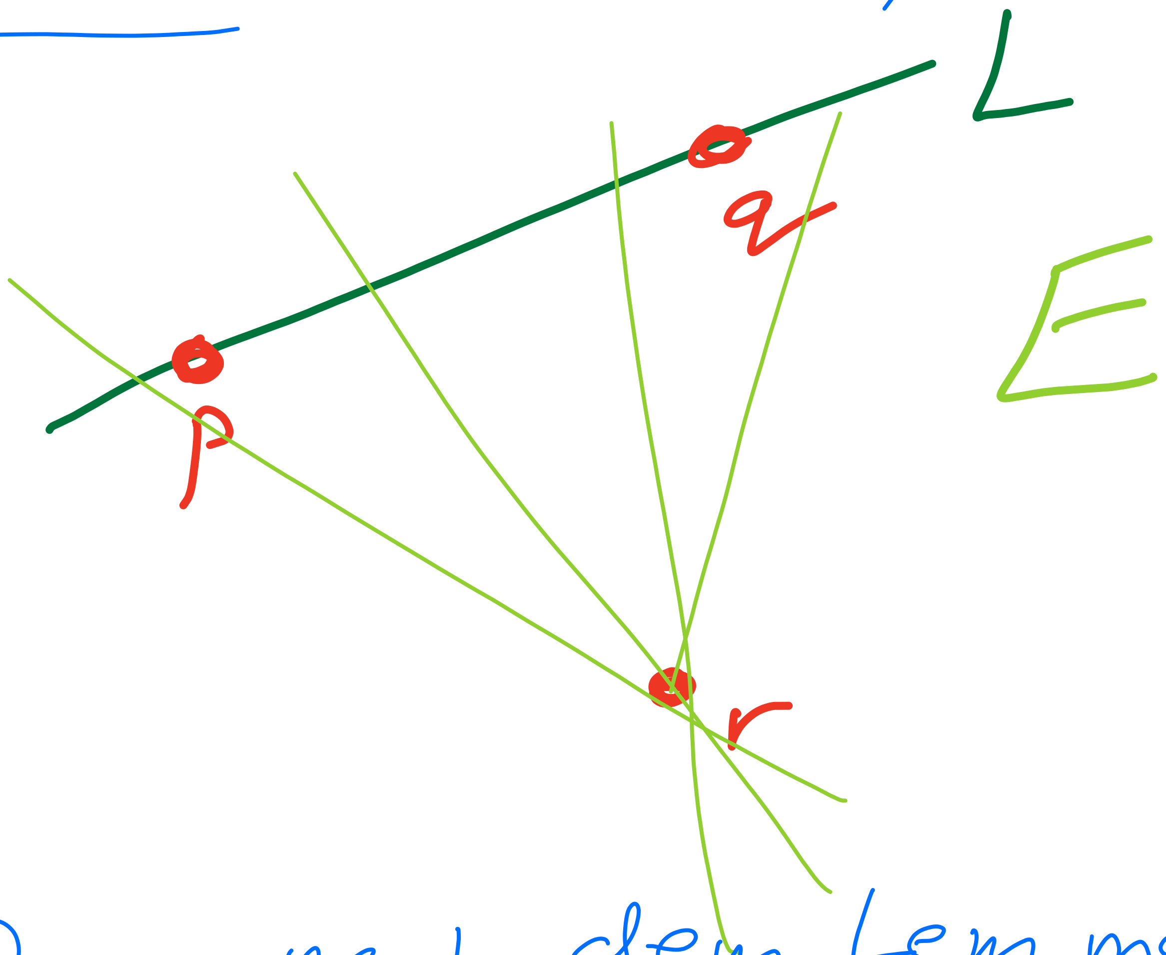


Nach dem Lemma ist

$$L \subseteq \mathrm{Fix}(\phi).$$

Fall 3. $\quad L = \mathrm{Fix}(\phi)$ fertig

Sonst: $\quad \exists\, r \notin L,\ r \in \mathrm{Fix}(\phi)$



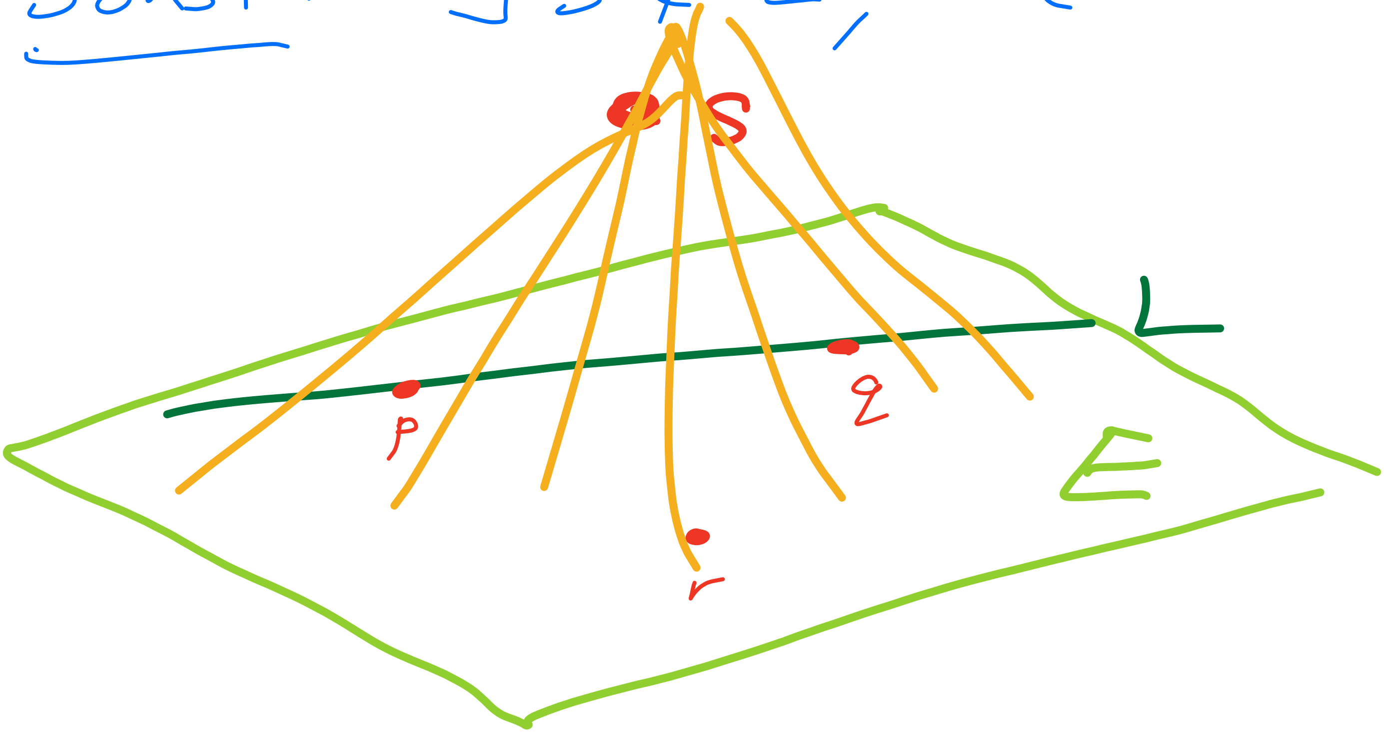
Dann nach dem Lemma ist jeder Punkt der Ebene E, die von L und r bestimmt ist, auch ein Fixpunkt von ϕ.

d.h.

$$E \subseteq \mathrm{Fix}(\phi).$$

Fall 4. $E = \mathrm{Fix}(\phi)$. fertig

Sonst: $\exists s \notin E, \; s \in \mathrm{Fix}(\phi)$



Dann: Mithilfe des Lemmas schliessen wir, dass der ganze Raum aus Fixpunkte von ϕ besteht, d.h.

wir sind bei

Fall 5. $Fix(\phi) = \mathbb{R}^3$

und wir sind fertig.

QED Behauptung.

Abschnitt 12 Bewegungen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

	fixpunktvoll	fixpunktfrei
OE		
OU		

Wir wollen die Isometrien von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ auflisten und klassifizieren nach

- Orientierung
- Fixpunkte

$\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$

	fixpunktvoll		fixpunktfrei
OE	Punkt:	Drehung Inversion	Translation
	$\mathbb{R}^2$:	Identität	
OU	Punkt:	Geradenspiegelung	Gleitspiegelung

6 types

$\mathbb{R}^3$

	fixpunktvoll	fixpunktfrei
OE	Achse: Drehung Geradenspiegelung $\mathbb{R}^3$: Identität	Schraubung Translation Gleit-Geradenspiegelung
OU	Punkt: Drehspiegelung Inversion Ebene: Ebenenspiegelung	Gleitspiegelung

Notiz: Drehspiegelung = Drehinversion

10 types

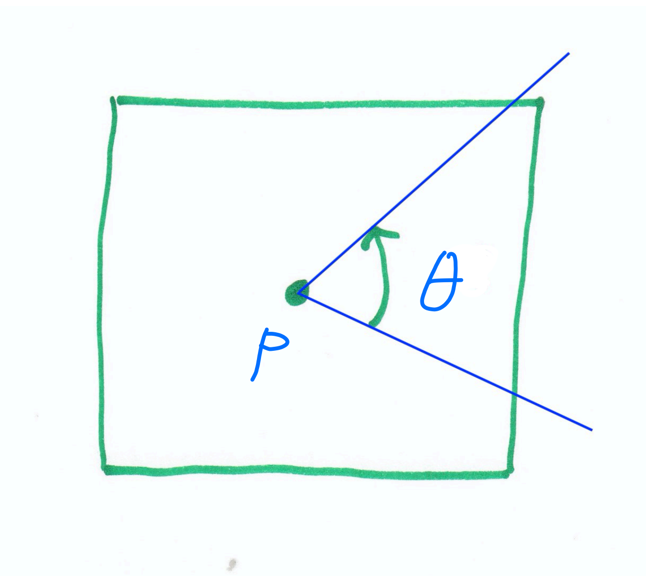
Drehung von $\mathbb{R}^2$

Daten:

$p \in \mathbb{R}^2$ Punkt

$\theta \in \mathbb{R}$ Winkel

$D_\theta(p)$ Drehung um p um θ



Drehung von $\mathbb{R}^3$

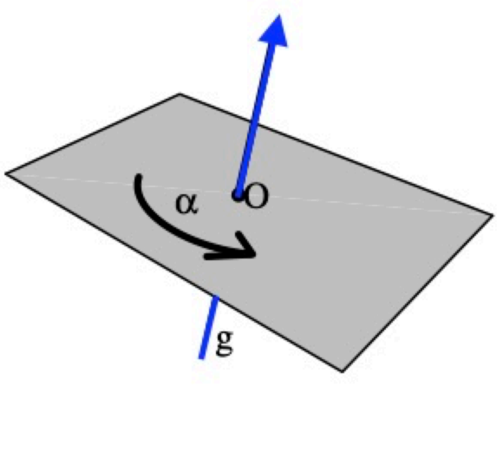
Daten:

A = Achse
  = Gerade mit Richtung

θ = Winkel $\in \mathbb{R}$

$D_\theta(A)$ = Drehung um A um θ

Recht-Hand-Regel



Spiegelungen in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

Daten: Entweder

p = Punkt, oder

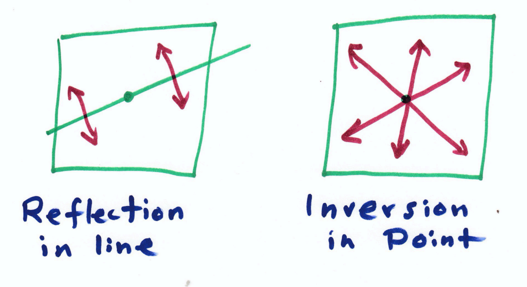
L = Gerade, oder

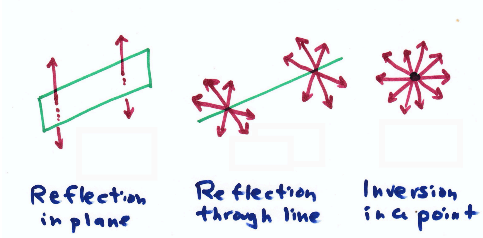
E = Ebene

σ_p oder Z_p = Inversion in p

σ_L = Spiegelung in L

σ_E = Spiegelung in E





Drehspiegelungen $(\mathbb{R}^3)$

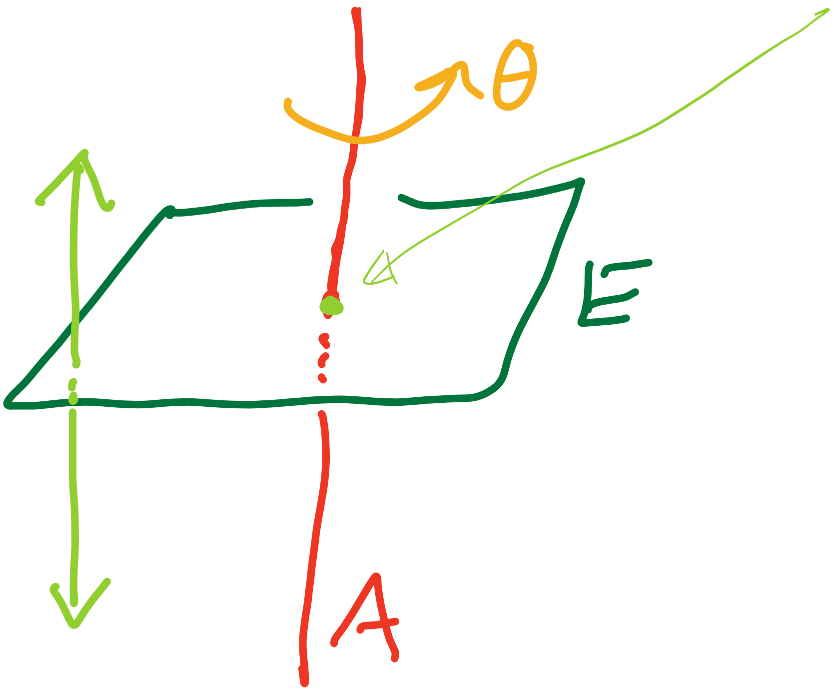
Daten:

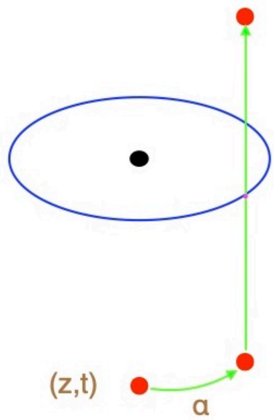
A = Achse

E = Ebene $\qquad E \perp A$

θ = Winkel $\in \mathbb{R}$

einziger Fixpunkt





$M_\theta(A, E)$ = Drehspiegelung um A um θ mit E

$$= D_\theta(A) \circ \sigma_E$$

$$= \sigma_E \circ D_\theta(A)$$

- OU
- $\mathrm{Fix}(\phi) = 1$ Punkt
  $= A \cap E$

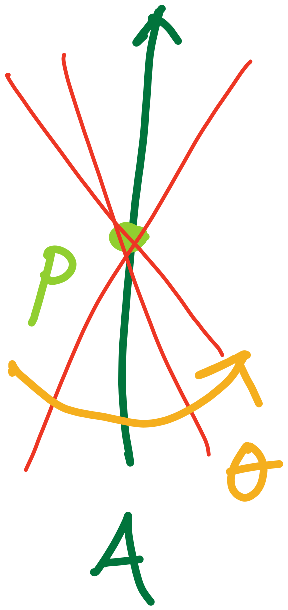
Drehinversion $(\mathbb{R}^3)$

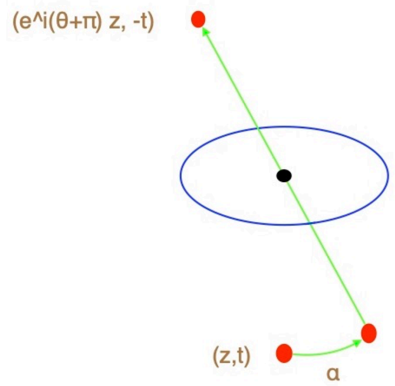
Daten:

A = Achse

p = Punkt $\qquad p \in A$

θ = Winkel $\in \mathbb{R}$





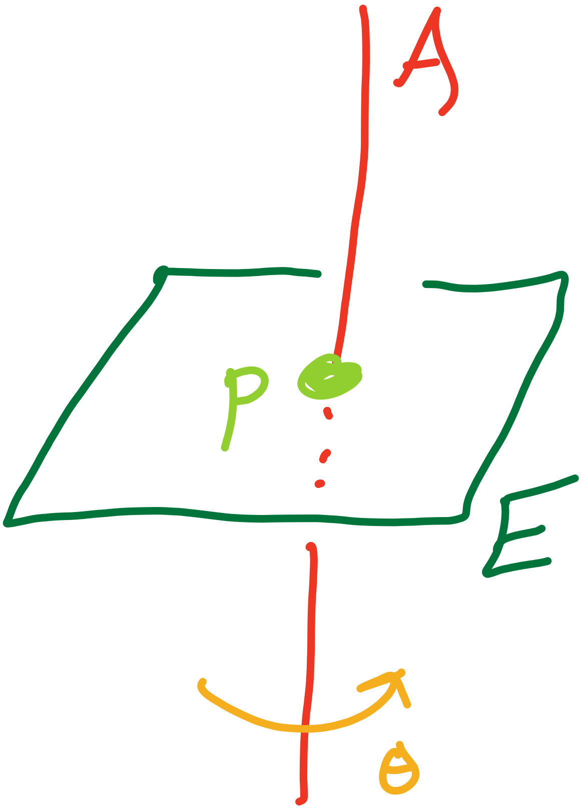
$N_\theta(A,p)$ = Drehinversion um A um θ an p

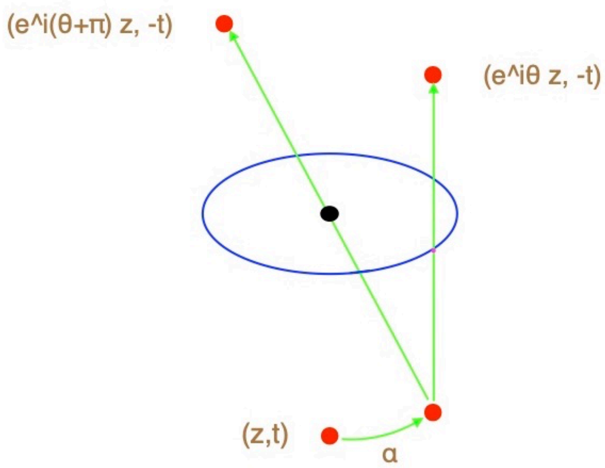
$$= D_\theta(A) \circ Z_p$$

$$= Z_p \circ D_\theta(A)$$

- $\mathcal{O}\mathcal{U}$
- $\mathrm{Fix}(\phi) = \{p\}$

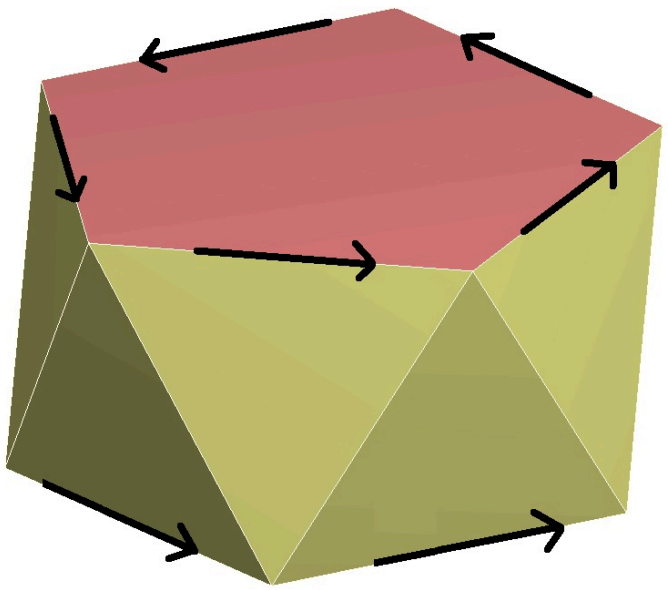
Jede Drehspiegelung ist eine Drehinversion und umgekehrt (mit $p \equiv E \cap A$)





$$\boxed{M_\theta (A,E) = N_{\theta+180}(A,p)}$$

Eine Drehspiegelung (bzw Drehinversion) erhält die folgende Figur (markierte Antiprisma):



Frage: Was ist die Ordnung einer Drehspiegelung von Drehwinkel $360/n$?

Ordnung = kleinste positive Zahl m, mit

$$\underbrace{\phi \circ \phi \circ \dots \circ \phi}_{m\text{-mal}} = id_{\mathbb{R}^3}$$

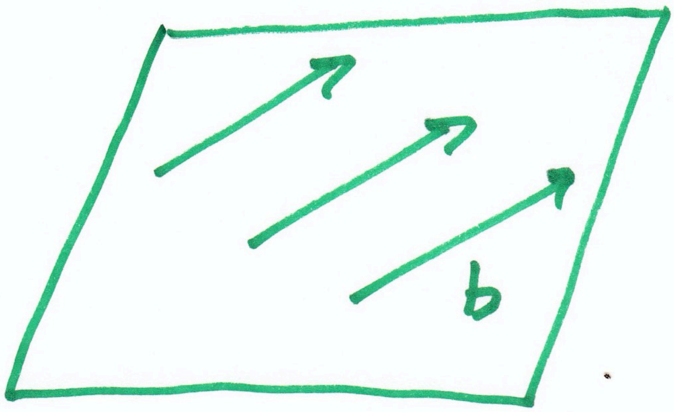
Tricky!

Translationen

Daten:

b = Vektor $\in \mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$

T_b = Translation um b



Schraubung

Daten:

A = Schraubachse

t = Displacement vector $\parallel A$

= Verschiebungsvektor

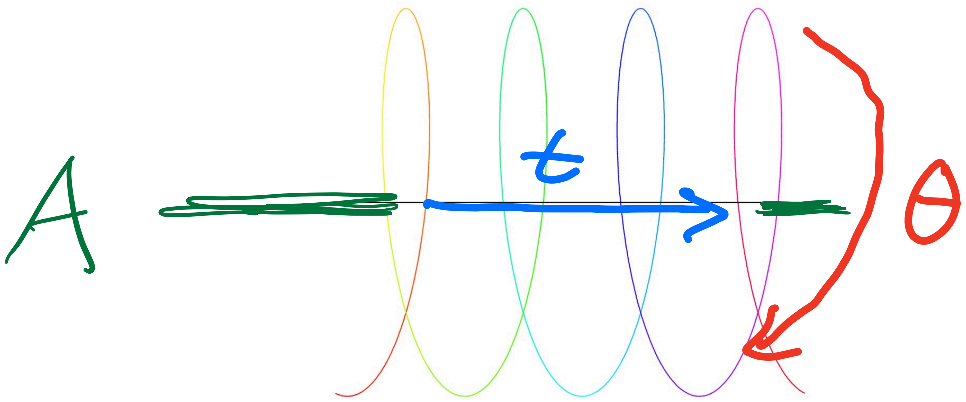
θ = Drehwinkel

$t \parallel A$

$S_\theta(A,t)$ = Schraubung um A um θ um t (!)

$$= T_t \circ D_\theta(A)$$

$$= D_\theta(A) \circ T_t$$



- OE
- keine Fixpunkte ($t \neq 0$)

Spezialfall: $\theta = 180$

$S_{180}(A,t)$ heisst

Gleit-Geradenspiegelung

(Translation, gefolgt durch eine Geraden-spiegelung.)

Gleitspiegelung ($\mathbb{R}^2$)

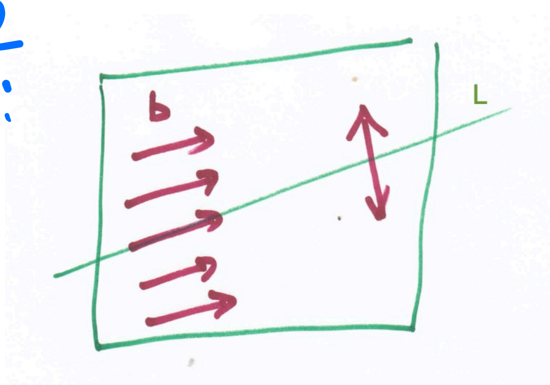
Daten:

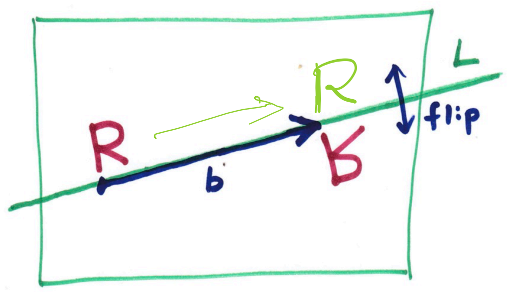
t = Verschiebungsvektor

L = Spiegelgerade, $t \parallel L$

$$G_t(L) = T_t \circ \sigma_L = \sigma_L \circ T_t$$

$\mathbb{R}^2$:





= Translation um t
gefolgt durch
Spiegelung an L

Gleitspiegelung ($\mathbb{R}^3$)

Daten:

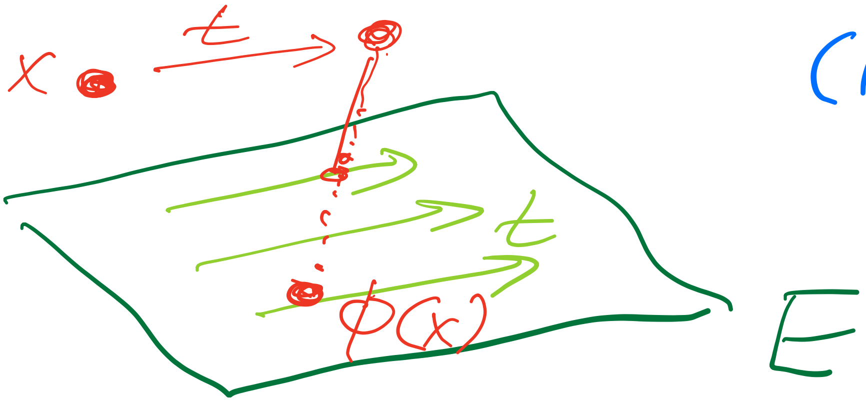
t = Verschiebungsvektor

E = Spiegelebene, $t \parallel E$

$$\phi = G_t(E) = T_t \circ \sigma_E = \sigma_E \circ T_t$$

($\mathbb{R}^3$)

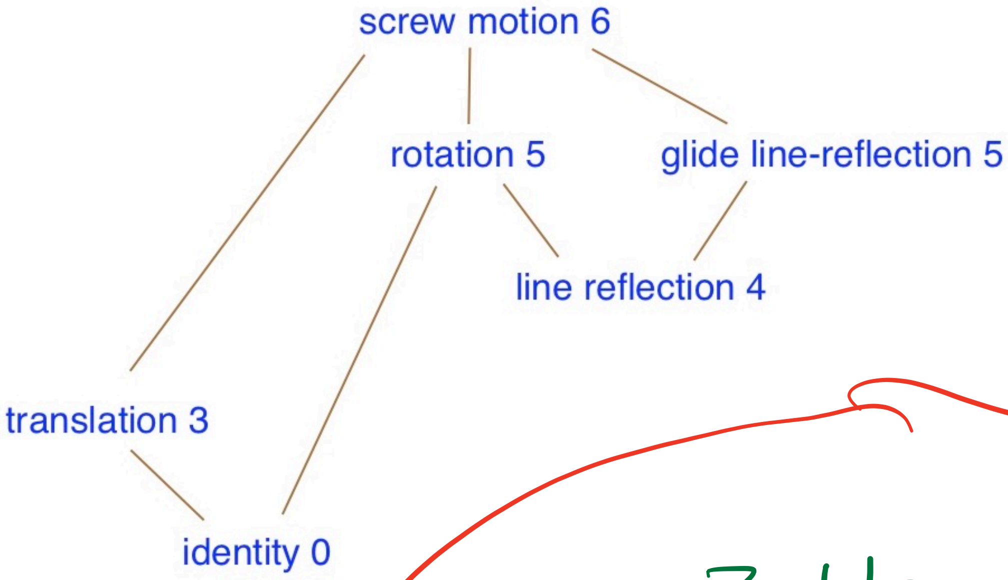
Bild:



= Translation um t gefolgt durch Spiegelung an E.

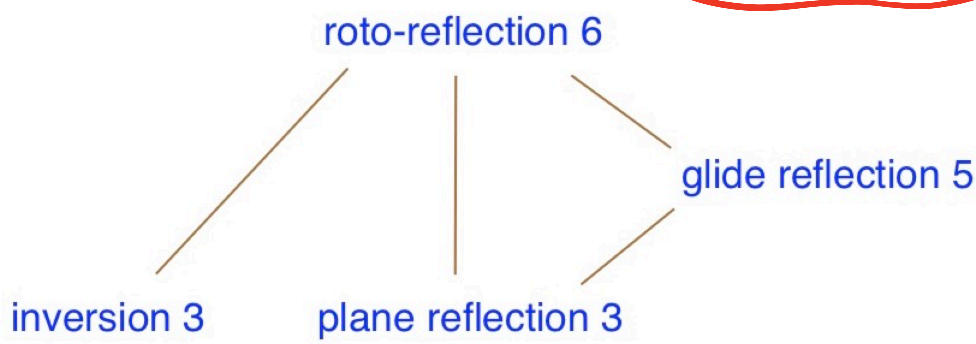
- OU $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$
- keine Fixpunkte $(t \neq 0)$

$\mathbb{R}^3$ OE



Die Zahlen sind die Anzahl Freiheitsgrade, die nötig sind, um die Isometrie zu bestimmen.

$\mathbb{R}^3$ OU



Satz ($\mathbb{R}^2$)

Das sind alle.

Satz ($\mathbb{R}^3$)

Das sind alle.

http://www.geometrygames.org/CurvedSpaces

https://roguetemple.com/z/hyper