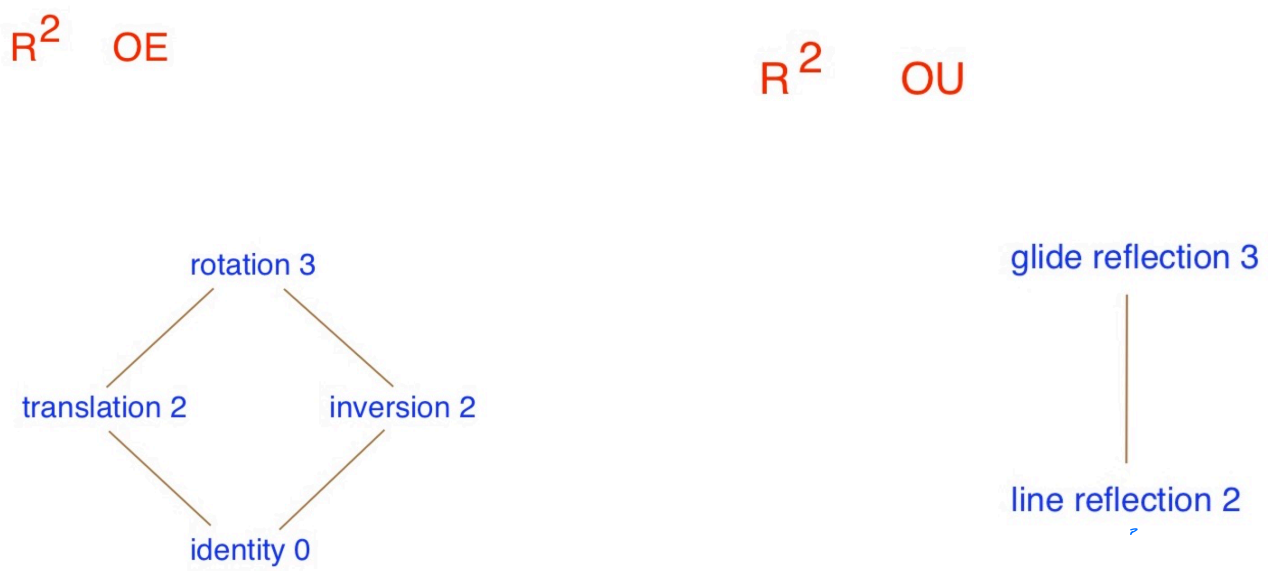
Bewegungen von $\mathbb{R}^2$

Unten sind die 6 Arten von starren Bewegungen von $\mathbb{R}^2$:



Die Zahlen sind die Anzahl "Freiheitsgrade", oder Dimensionen die notig sind, um eine Isometrie der angegebenen Art zu bestimmen.

Zum Beispiel...

Geradenspiegelungen in $\mathbb{R}^2$:

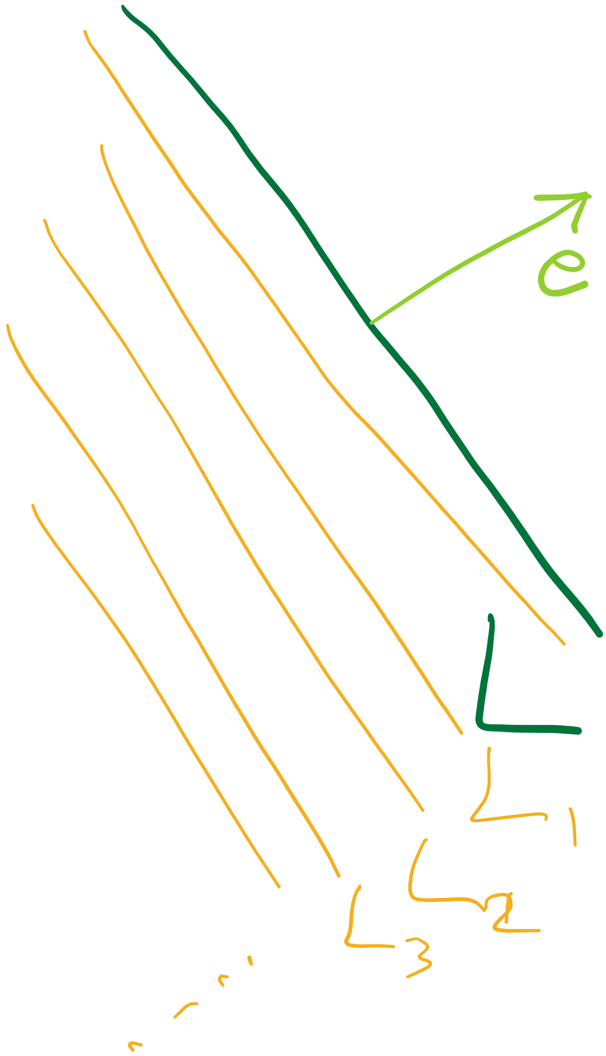
Wieviel reelle Zahlen braucht man, um eine Geradenspiegelung von $\mathbb{R}^2$ zu bestimmen?

Daten: Eine Gerade L in $\mathbb{R}^2$

Also wieviel reelle Zahlen braucht man, um eine Gerade L in $\mathbb{R}^2$ zu bestimmen?

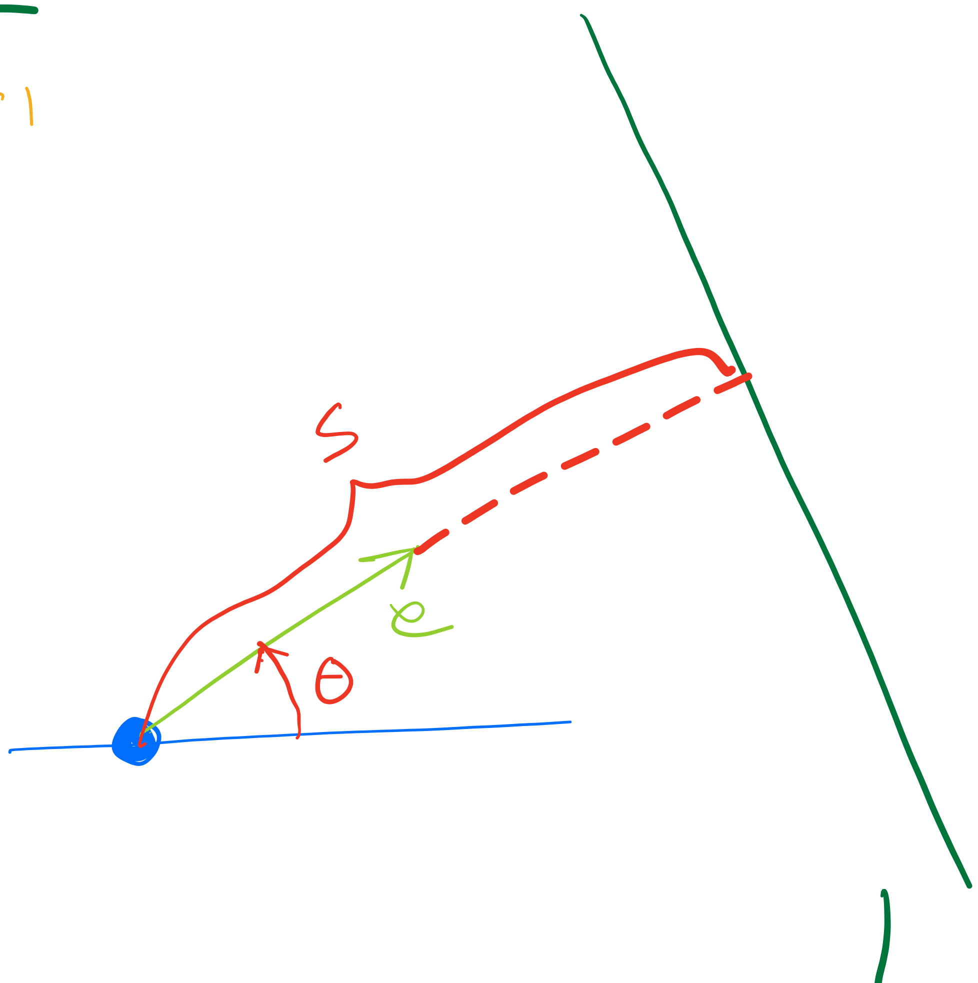
$\boxed{2}$ ⟶ stimmt mit der Tafel überein

Warum?



1) Richtung von e
$\theta \in [0, 2\pi)$

2) Verschiebung von L in Richtung e
$s \in [0, \infty)$



Abschnitt 14

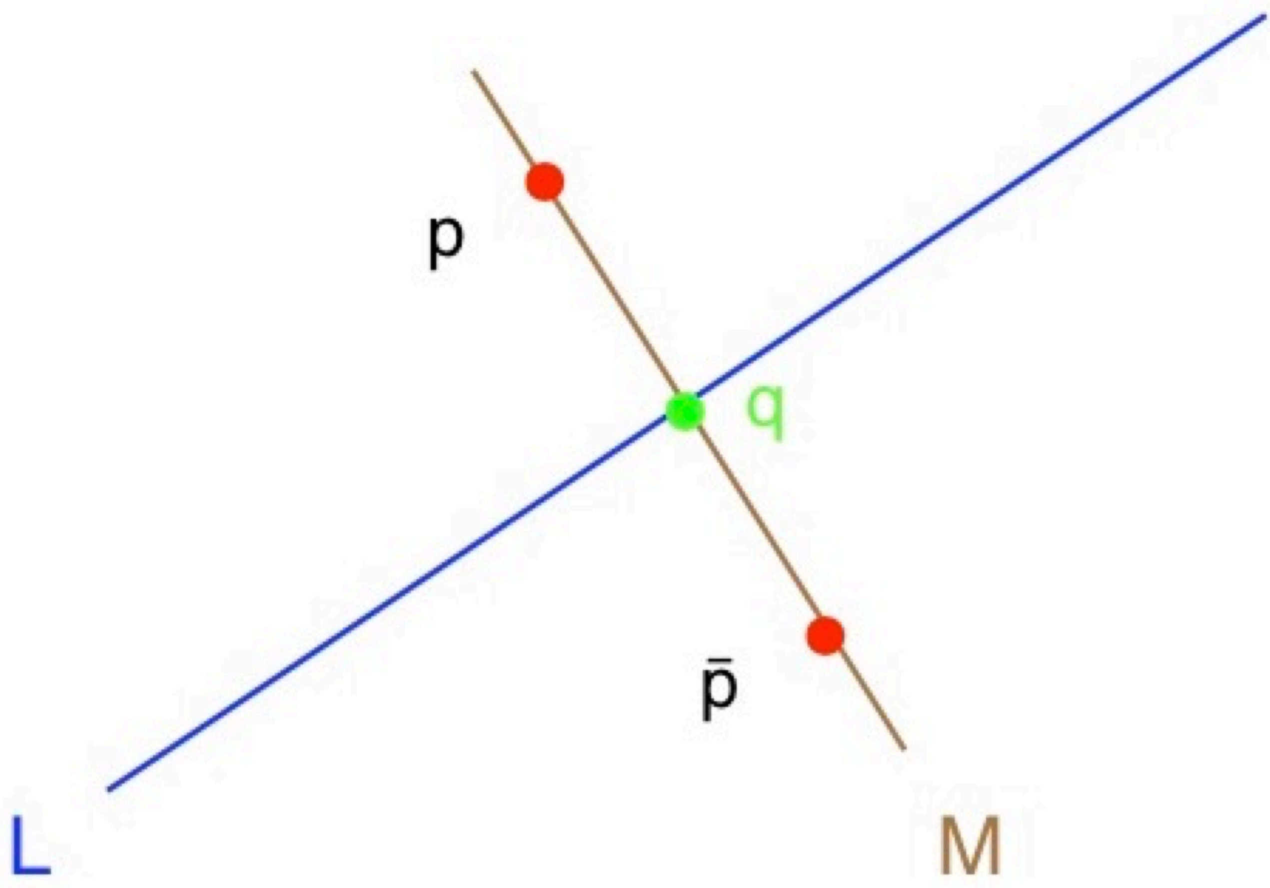
Beweis der Vollständigkeit der Liste von Isometrien von $\mathbb{R}^2$, die einen Fixpunkt haben

Satz Eine Isometrie von $\mathbb{R}^2$, die einen Fixpunkt hat, ist eine Drehung oder eine Geradenspiegelung.

inklusive
Identität
Punkspiegelung

Beweis Überspringen

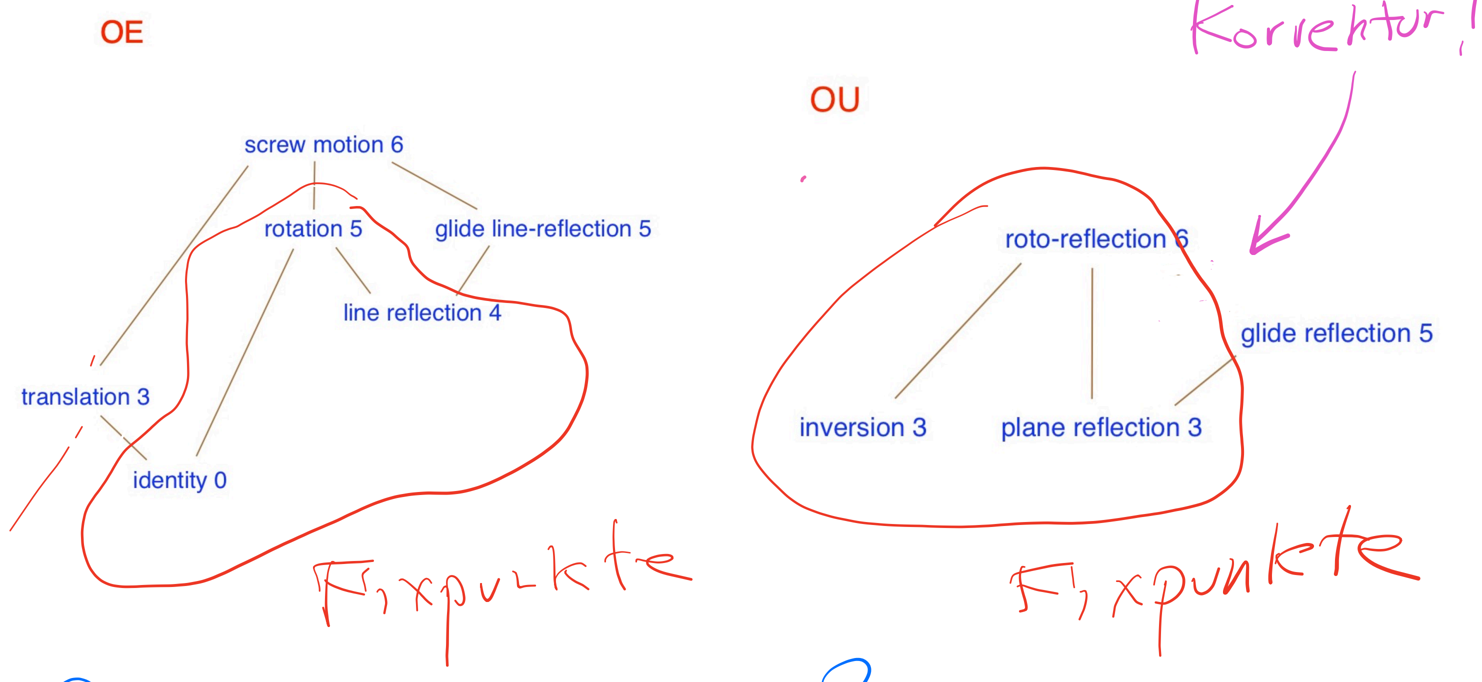
Siehe Skript und Knörrer S. 6-8



p
q
p̄
L
M

Bewegungen von $\mathbb{R}^3$

Unten sind die 10 Arte. von starren Bewegungen von $\mathbb{R}^3$:



Sind das alle?

Abschnitt 15

Beweis der Vollständigkeit der Liste von Isometrien von $\mathbb{R}^3$, die einen Fixpunkt haben.

Satz Eine Isometrie von $\mathbb{R}^3$, die einen Fixpunkt besitzt, ist eine Drehung oder eine Drehspiegelung.

inklusive
Inversion
Ebenenspiegelung

inklusive
Identität
Geradenspiegelung

2 Schritte:

- Achse-Lemma berühmt
- Beweis selber

Achse-Lemma (Euler)

Sei ϕ eine Isometrie von $\mathbb{R}^3$, die einen Fixpunkt p hat. Sei Z die Inversion an p. Dann fixiert entweder ϕ oder $Z \circ \phi$ eine Achse.

Wichtiges Lemma!

3 Beweise:

1) Lineare-Algebra. Wlog $p = 0$.
Sei A die Matrix von ϕ.
Man löst die Gleichung
$\det(A - \lambda I) = 0$ für den
Eigenwert $\lambda = \pm 1$.

2) <u>Topologie</u>: Jeder Homöomorphismus (d.h. bijektive bistetige Abbildung) von S^2 mit sich entweder fixiert einen Punkt p, oder nimmt p zu seinem Antipode $Z(p)$.

Für die Beweise 1)–2), siehe das Skript.

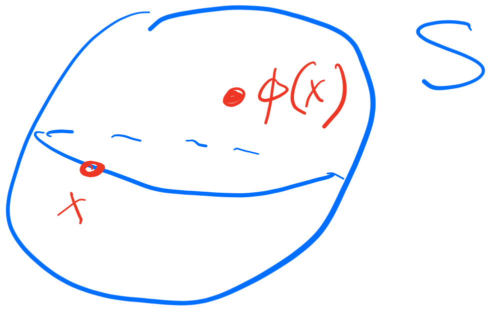
3) <u>Geometrie</u>: folgt.

Beweis des Achse-Lemmas

1. Sei ϕ eine Isometrie von $\mathbb{R}^3$, die 0 fixiert. Sei

$$S := \{x \in \mathbb{R}^3 : d(x,0) = 1\}$$

die Einheitssphäre.



Wir haben

$$x \in S \Longrightarrow \phi(x) \in S,$$

weil ϕ eine Isometrie ist.

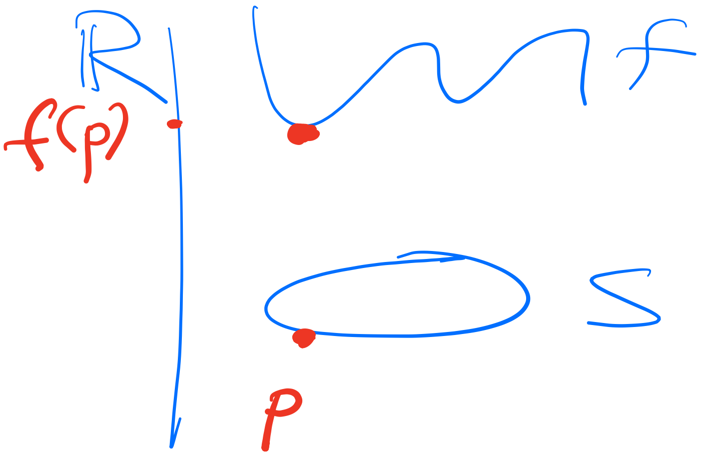
Wir betrachten den Abstand

$\underline{\underline{d(x, \phi(x))}}$ für jedes $x \in S$.

Wir definieren

$$f(x) := d(x, \phi(x)), \quad x \in S$$

$$f : S \to [0, \infty)$$



Sei $p \in S$ ein Punkt, der f minimiert:

$$f(p) = \min_{x \in S} f(x).$$

Damit wir sicher sein können, dass p existiert, brauchen wir 3 Aussagen aus der Analysis:

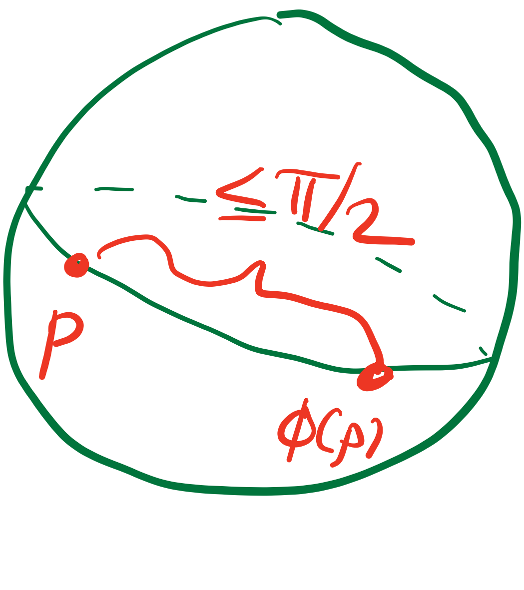
1) f ist stetig ✓
2) Eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge hat ein Minimum ✓
3) S ist kompakt ✓

Wir akzeptieren diese Aussagen ohne Beweis. Also $p \in S$ erfüllt

$$f(p) \leq f(x) \quad \forall x \in S.$$

2. Betrachte p und $\phi(p)$. Falls p und $\phi(p)$ haben den Winkel-Abstand in S grösser als $\pi/2$ (geradlinig Abstand $\sqrt{2}$), ersetzen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA) ϕ durch $Z \circ \phi$.

Nun ist der Winkel-Abstand zwischen p und $\phi(p)$ weniger gleich $\pi/2$.



Falls $p = \phi(p)$, so fixiert ϕ die Achse durch p und $-p$, und wir sind fertig.

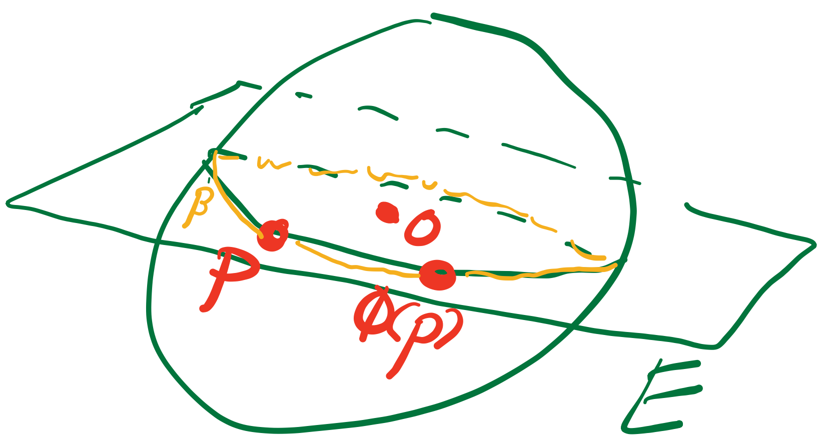
Also man nimmt an:

$$\boxed{p \neq \phi(p)}.$$

Dann gibt es eine Ebene E, die von den Punkten

$$p, \ \phi(p), \ 0$$

bestimmt ist.



Die Menge

$$\beta := E \cap S$$

ist ein Grosskreis (Eqvator).

Sei

$$\gamma$$

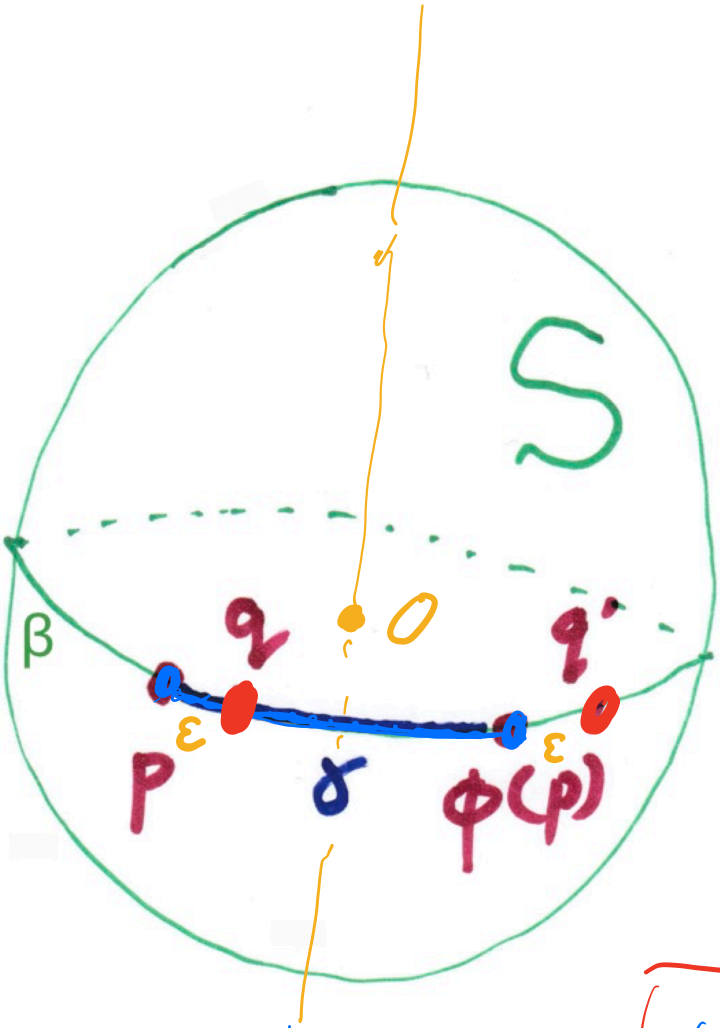
die kurze Strecke von β, die p mit $\phi(p)$ verbindet.

Sei q ein Punkt von γ, der nah an p ist, sagen wir

$$0 \neq d(p,q) = \varepsilon << 1.$$

Sei q' der Punkt von $\beta \setminus \gamma$, der nah an $\phi(p)$ ist, mit

$$d(\phi(p), q') = \varepsilon.$$



$Z = Z_0$

Behauptung 1: $\boxed{\phi(q) = q'}$!!

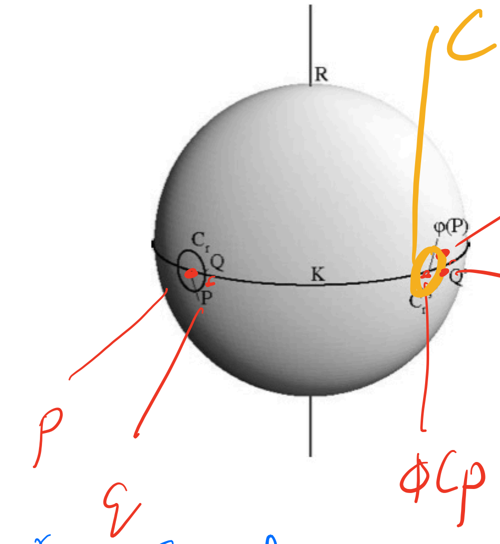
(Dieser Schritt ist der klugste Schritt des Beweises)

Beweis: Auf der einen Seite,

$$d(\phi(q), \phi(p)) = d(q, p) = \varepsilon,$$

also $\phi(q)$ liegt auf dem Kreis

$$C := \{x \in S \mid d(x, \phi(p)) = \varepsilon\}.$$



$\phi(q) \in C$

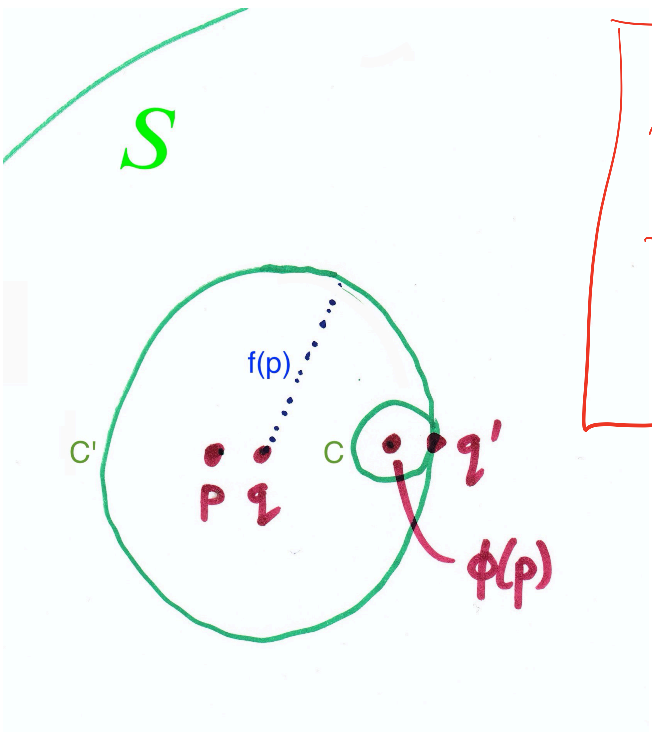
$q' \in C$ / $\phi(q) \overset{?}{=} q'$

Auf der anderen Seite,

$$d(\phi(q), q) = f(q) \geq f(p) = d(\phi(p), p),$$

weil p f minimiert, also $\phi(q)$ liegt auf oder ausserhalb dem Kreis

$$C' := \{x \in S \mid d(x,q) = f(p)\}$$



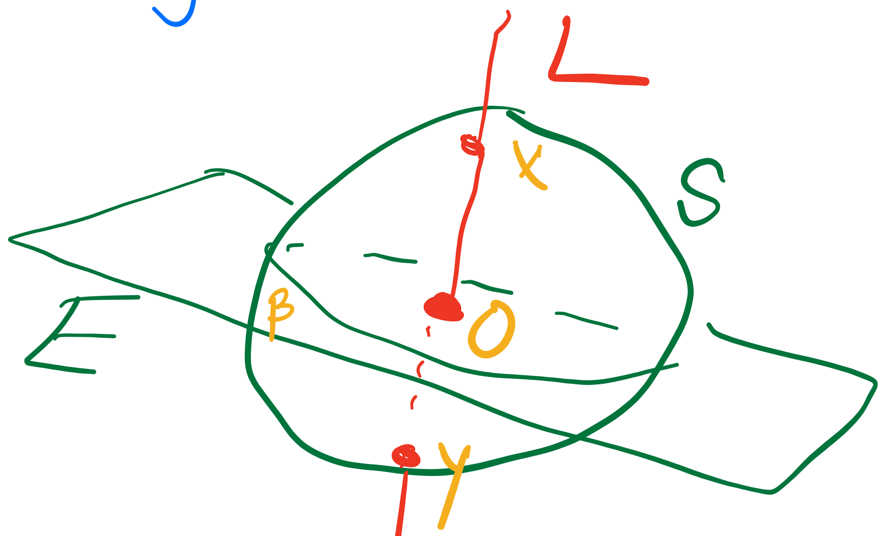
Aber C und C' tangieren sich im Punkt q'

$$C \cap C' = \{q'\}$$

Also: q' ist der einzige Punkt, mit $(q' \in C)$ und $(q' \in C'$ oder ausserhalb$)$.

Also: $\boxed{\phi(q) = q'}$ QED Beh. 1.

3. Sei L die Gerade, die senkrecht zur Ebene E am Ursprung steht.



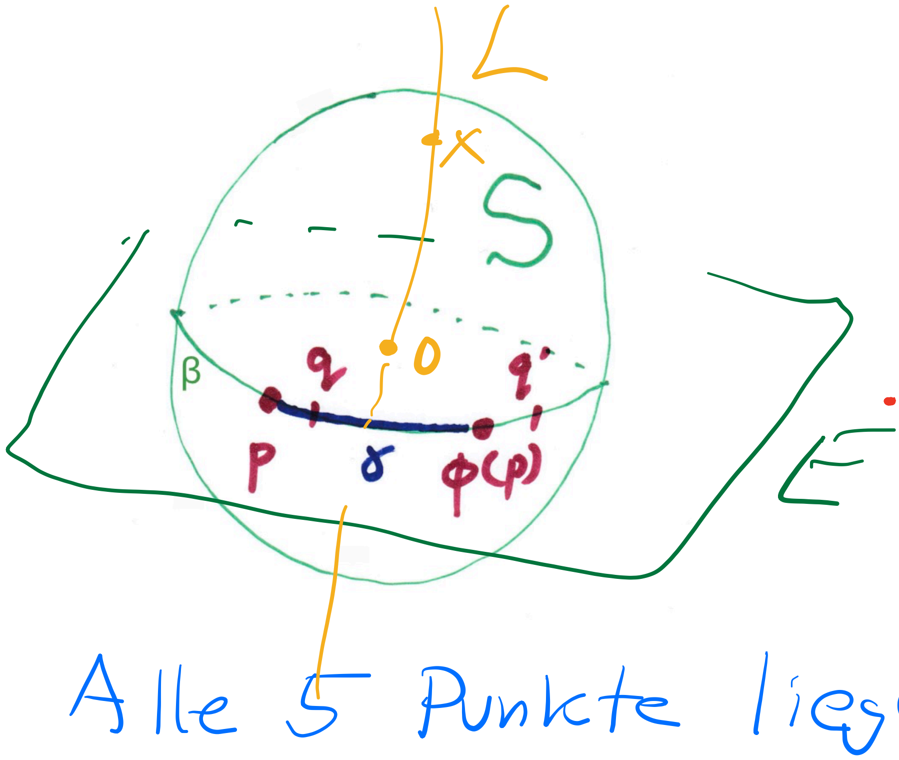
Sei $x =$ Nordpol, $y =$ Sudpol

$\{x, y\} = L \cap S$.

Behauptung 2: $\phi(L) = L$

Beweis: Betrachte

$p, q, \phi(p), \phi(q) = q', \quad O$



$\phi(E) = E$
$\phi(O) = O$
$\therefore \phi(L) = L$

Alle 5 Punkte liegen in E.

E ist bestimmt durch p, q, O

$\phi(E)$ ist bestimmt durch $\phi(p), \phi(q), \phi(O)$, wobei $\phi(q) = q'$ und $\phi(O) = O$

Aber E ist auch bestimmt durch $\phi(p), q', O$.

Also $\boxed{\phi(E) = E}$

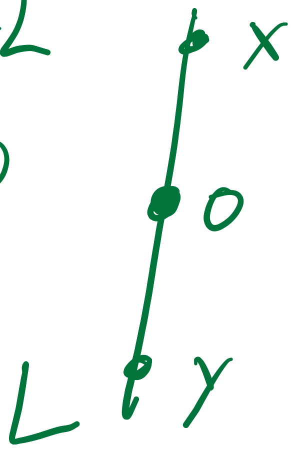
Es folgt, dass

$$\phi(L) = L$$

QED Behauptung 2.

$\phi(L) = L$

$\phi(0) = 0$



Also ϕ fixiert L oder

ϕ kehrt L um

Also ϕ fixiert L oder

$z \circ \phi$ fixiert L.

QED Achse-Lemma.

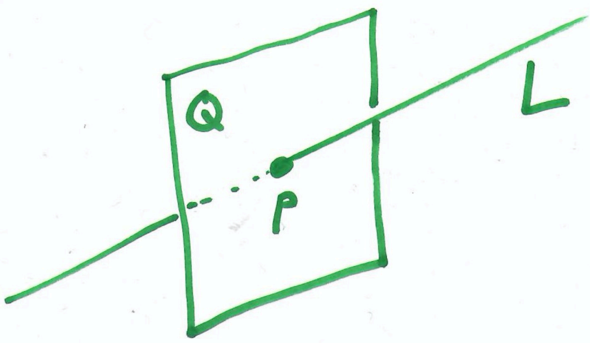
Pause

Beweis des Satzes

1. Sei χ eine Isometrie, die eine Achse L fixiert. Was kann χ sein?

[• Drehung
• Ebenenspiegelung]

Sei $p \in L$. Sei Q die Ebene durch p und senkrecht zu L.

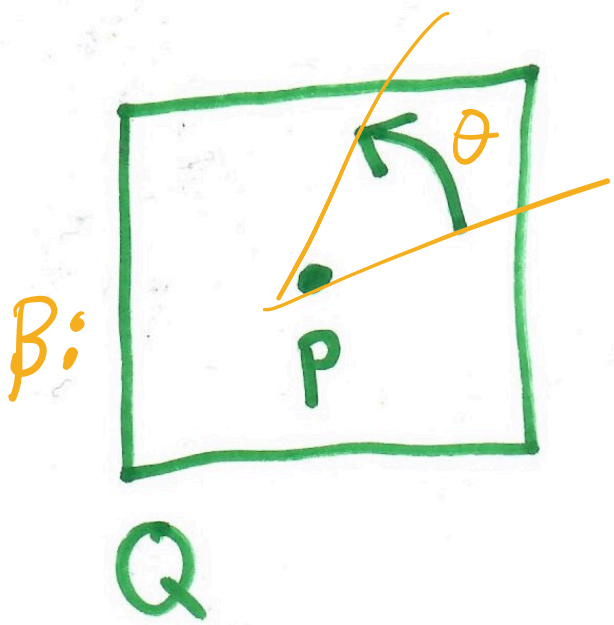


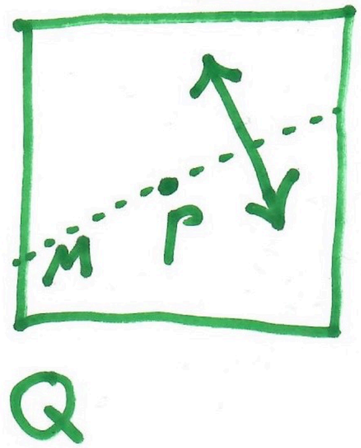
Da $\chi(L) = L$, muss $\chi(Q) = Q$ und $\beta := \chi|Q$ ist eine Isometrie

$$\beta : Q \to Q$$

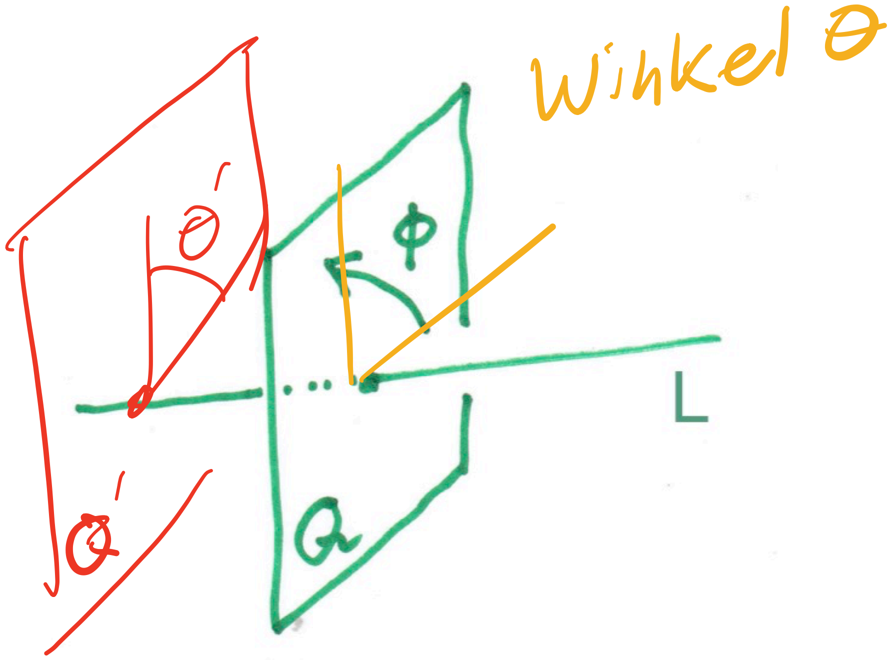
wobei $Q \cong \mathbb{R}^2$.

β hat den Fixpunkt p.
Es folgt dann aus der Klassifizierungsatz der Isometrien von $\mathbb{R}^2$ mit Fixpunkt (Abschnitt 14), dass β entweder eine Drehung (ump um einen Winkel θ) oder eine Geradenspiegelung (an einer Geraden M durch p) sein muss:

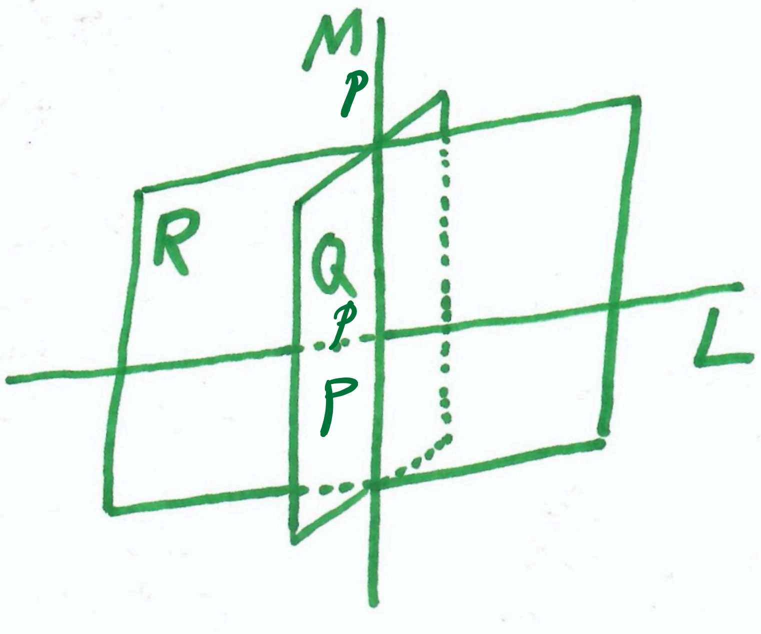




Im ersten Fall ist Φ eine Drehung um L um den Winkel θ. (θ muss unabhängig von p sein.)



Im Zweiten Fall ist Φ eine Ebenenspiegelung an der Ebene R, die durch L und M bestimmt ist (alle M_p müssen parallel sein)



Zusammenfassung: Eine Isometrie χ von $\mathbb{R}^3$, die eine Gerade fixiert, ist eine Drehung oder Ebenenspiegelung.

2. Jetzt zum eigentlichen Beweis des Satzes.

Sei ϕ eine Isometrie von $\mathbb{R}^3$, die einen Punkt p fixiert.
Es ergibt aus Schritt 1. und dem Lemma 4 Fälle:

1) ϕ fixiert eine Achse L und ist OE
Dann ist ϕ eine Drehung um L

2) ϕ fixiert eine Achse L und ist OU,
Dann ist ϕ eine Ebenenspiegelung

3) $\phi \circ Z$ fixiert eine Achse und ist OE.
Dann ist $\phi \circ Z$ eine Drehung.
$\phi = (\phi \circ Z) \circ Z$ Drehinv.
Also ist ϕ eine Drehspiegelung.

4) $\phi \circ Z$ fixiert eine Achse und ist OU.
Dann ist $\phi \circ Z$ eine Ebenensp.
$\phi = (\phi \circ Z) \circ Z$
Also ist ϕ eine Geradenspiegelung

QED Satz.

Abschnitt 16

Hintereinanderschaltung von Drehungen

Satz Seien ϕ und ψ Drehungen mit Fixpunkt p. Dann ist $\psi \circ \phi$ eine Drehung, die p fixiert.

1) Man kann Matrizen benutzen oder
2) Man kann diesen Satz aus dem Klassifizierungssatz für Isometrien von $\mathbb{R}^3$ mit Fixpunkt schliessen, oder
3) Aber ein direkter geometrischer Beweis lohnt sich.

1) $\text{Drehung}_p \circ \text{Drehung}_p = \text{Drehung}_p$

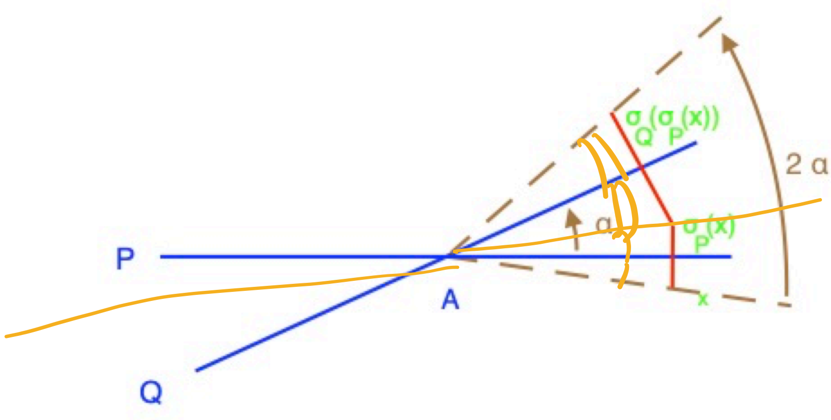
2) $\text{Ebenenspiegelung}_p \circ \text{Ebenenspiegelung}_p = \text{Drehung}_p$

Lemma Seien P und Q Ebenen, die sich in einer Achse $A = P \cap Q \neq \emptyset$ schneiden. Dann ist

$$\sigma_Q \circ \sigma_P$$

eine Drehung um A.

Beweis:



QED

Weiter: Haben P und Q den Winkel $\boxed{\alpha}$ zwischen sich, so ist $\sigma_Q \circ \sigma_P$ eine Drehung um A um den Winkel

$\boxed{2\alpha}$.

Wenn wir die Ebenen-spiegelungen in der anderen Reihenfolgen

$$\sigma_P \circ \sigma_Q$$

hintereinanderschalten, so ist der Winkel $\boxed{-2\alpha}$.

Beweis des Satzes

Falls die Achsen von ϕ und ψ ...