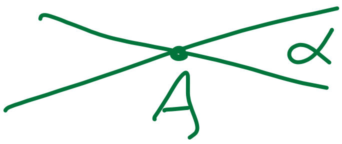
Abschnitt 16 fort. In $\mathbb{R}^3$:

Lemma Falls sie p fixieren:

$$\boxed{\text{Spiegelung} \circ \text{Spiegelung} = \text{Drehung}}$$



Winkel α $\Rightarrow$ Drehwinkel 2α

Satz Falls sie p fixieren:

$$\boxed{\text{Drehung} \circ \text{Drehung} = \text{Drehung}}$$

Beweis des Satzes

Seien ϕ und ψ Drehungen von $\mathbb{R}^3$, die p fixieren.

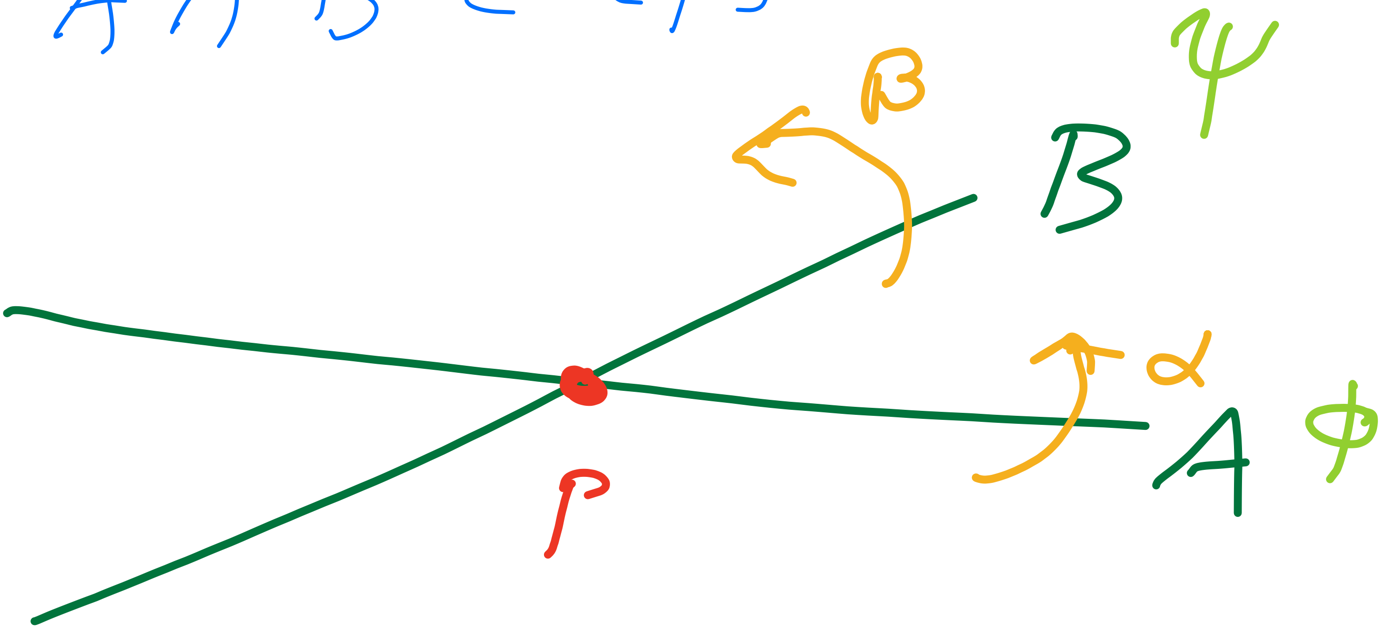
Falls ϕ und ψ dieselbe Achse haben, sind wir fertig. ✓

Also nehmen wir an, dass

ϕ hat Achse A

ψ hat Achse B

$A \cap B = \{p\}$

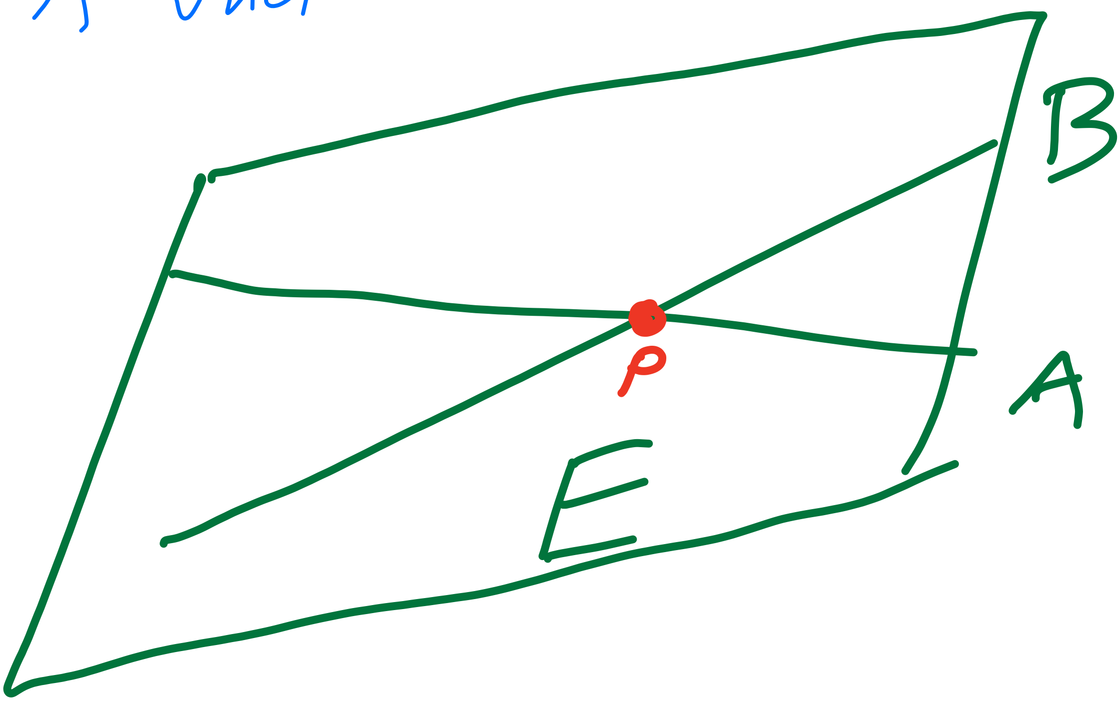


und

ϕ hat Drehwinkel $\underline{\underline{\alpha}}$ um A

ψ hat Drehwinkel $\underline{\underline{\beta}}$ um B

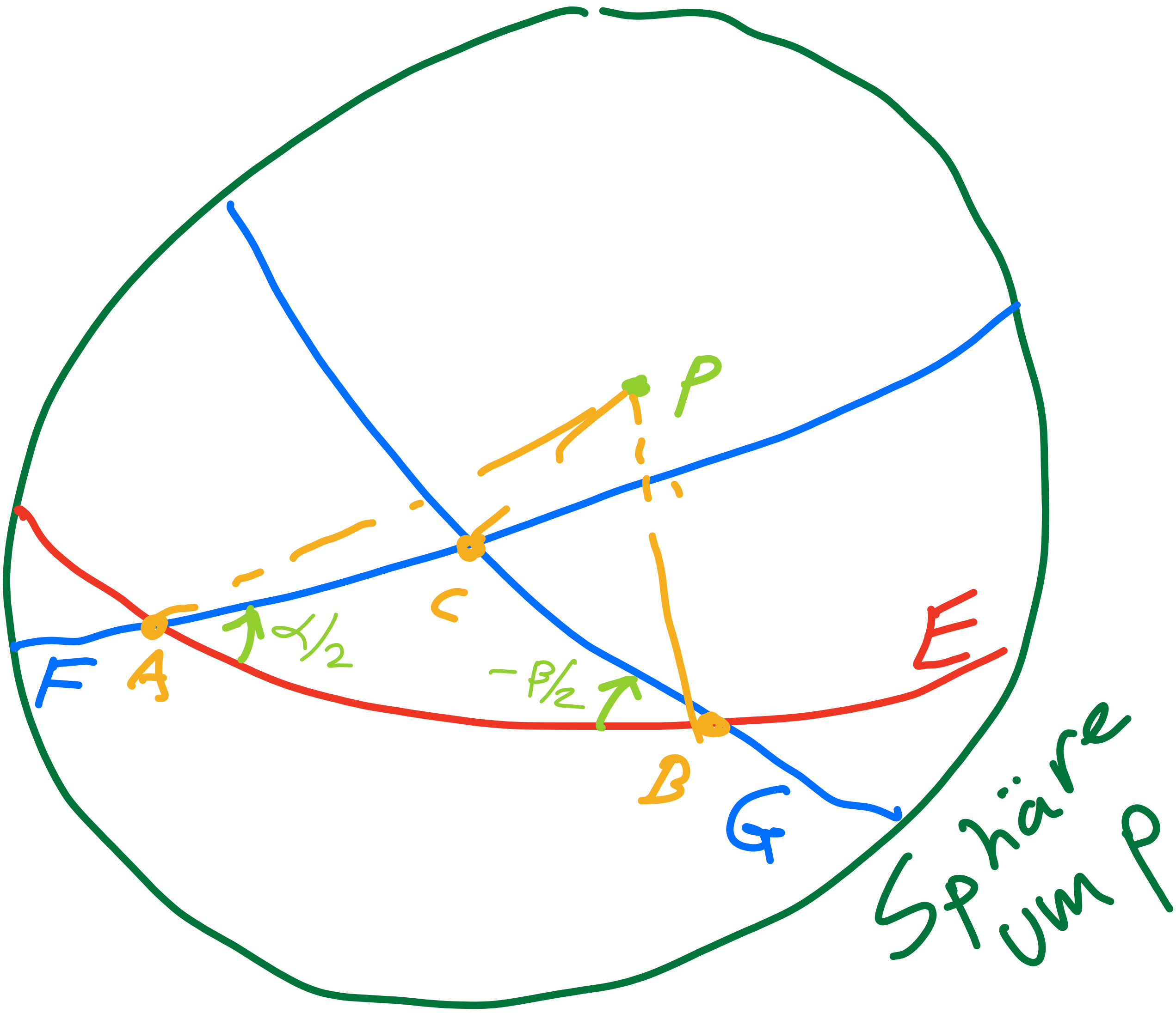
Sei E die Ebene, die von A und B bestimmt ist,



Sei F die Ebene, die A enthält, und den Winkel $\alpha/2$ mit E hat.

Sei G die Ebene, die B enthält, und den Winkel $\beta/2$ mit E hat.

$p \in E, F, G$



Sei $C = F \cap G$ Achse

Seien

$$\sigma_E, \quad \sigma_F, \quad \sigma_G$$

die Ebenenspiegelungen an E, F, G. Aus dem Lemma haben wir

$$\phi = \sigma_E \overset{\alpha/2}{\circ} \sigma_F \qquad \alpha$$

$$\psi = \sigma_G \overset{-\beta/2}{\circ} \sigma_E \qquad \beta$$

wobei man bei ψ das Vorzeichen beachten muss.

Dann:

$$\psi \circ \phi = (\sigma_G \circ \sigma_E) \circ (\sigma_E \circ \sigma_K)$$

$$= \sigma_G \circ (\sigma_E \circ \sigma_E) \circ \sigma_K$$

$$= \sigma_G \circ id \circ \sigma_K$$

$$= \sigma_G \circ \sigma_F$$ Drehung !!

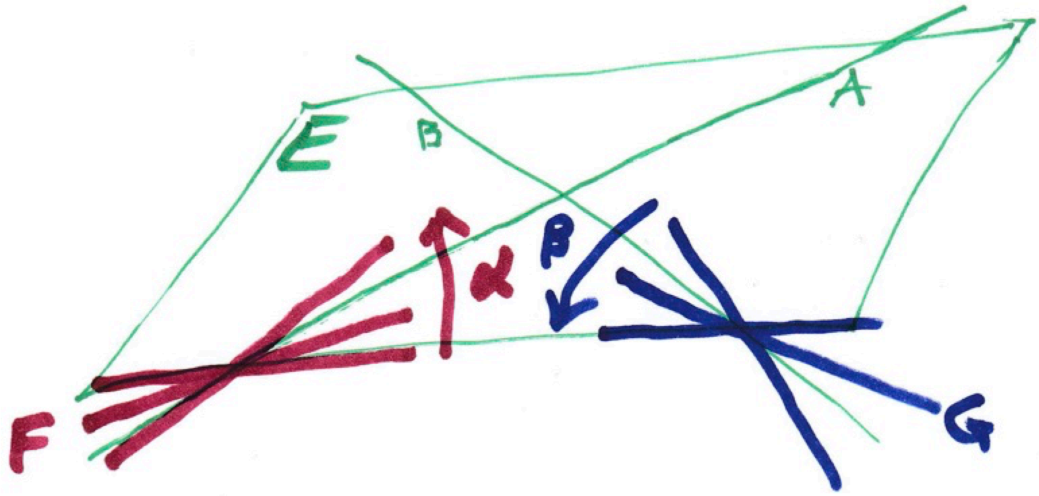
Aber nach dem Lemma wieder ist die Hintereinander-Schaltung von zwei Ebenen-Spiegelungen eine Drehung.

(Und zwar um

$$C = F \cap G.)$$

QED

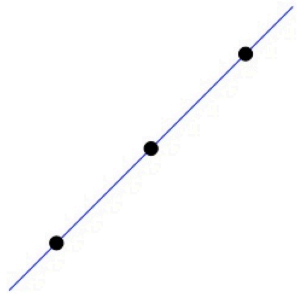
<u>Frage:</u> Was ist die Hintereinanderschaltung von zwei Inversionen?


E
B
A
α
β
F
G

Abschnitt 17

<u>Frage:</u> Wann müssen zwei Isometrien übereinstimmen?

<u>Def</u> Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ heissen <u>kollinear</u>, falls sie auf einer Geraden liegen. Sonst heissen sie <u>nicht-kollinear</u>.



collinear

non-collinear

Aussage 1 Zwei Isometrien von $\mathbb{R}^2$, die dieselben Werte bei drei nicht-kollinearen Punkten annehmen, müssen überall übereinstimmen.

D.h. Eine Isometrie ist schon von ihren Werten bei drei nicht-kollinearen Punkten bestimmt.

Beweis

Seien $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Isometrien, mit

$$\phi(x_i) = \psi(x_i), \quad i=1,2,3,$$

wobei

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$$

nicht-kollinear sind.

Dann

$$(\psi^{-1} \circ \phi)(x_i) = x_i,$$

$i = 1, 2, 3.$

Zur Erinnerung: Die Fixpunktmenge einer Isometrie von $\mathbb{R}^2$ ist entweder

$\emptyset$, Punkt, Gerade, Ebene

Also muss die Fixpunktmenge von $\psi^{-1} \circ \phi$ schon die ganze Ebene $\mathbb{R}^2$ sein. Also

$$\psi^{-1} \circ \phi = id_{\mathbb{R}^2}$$

$$\phi = \psi$$

QED.

Bmk Es gibt einen direkten geometrischen Beweis im Appendix

Aussage 2 Zwei Isometrien von $\mathbb{R}^3$, die dieselben Werte bei vier Punkten annehmen, die nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen ("nicht-koplanar"), stimmen überall überein.

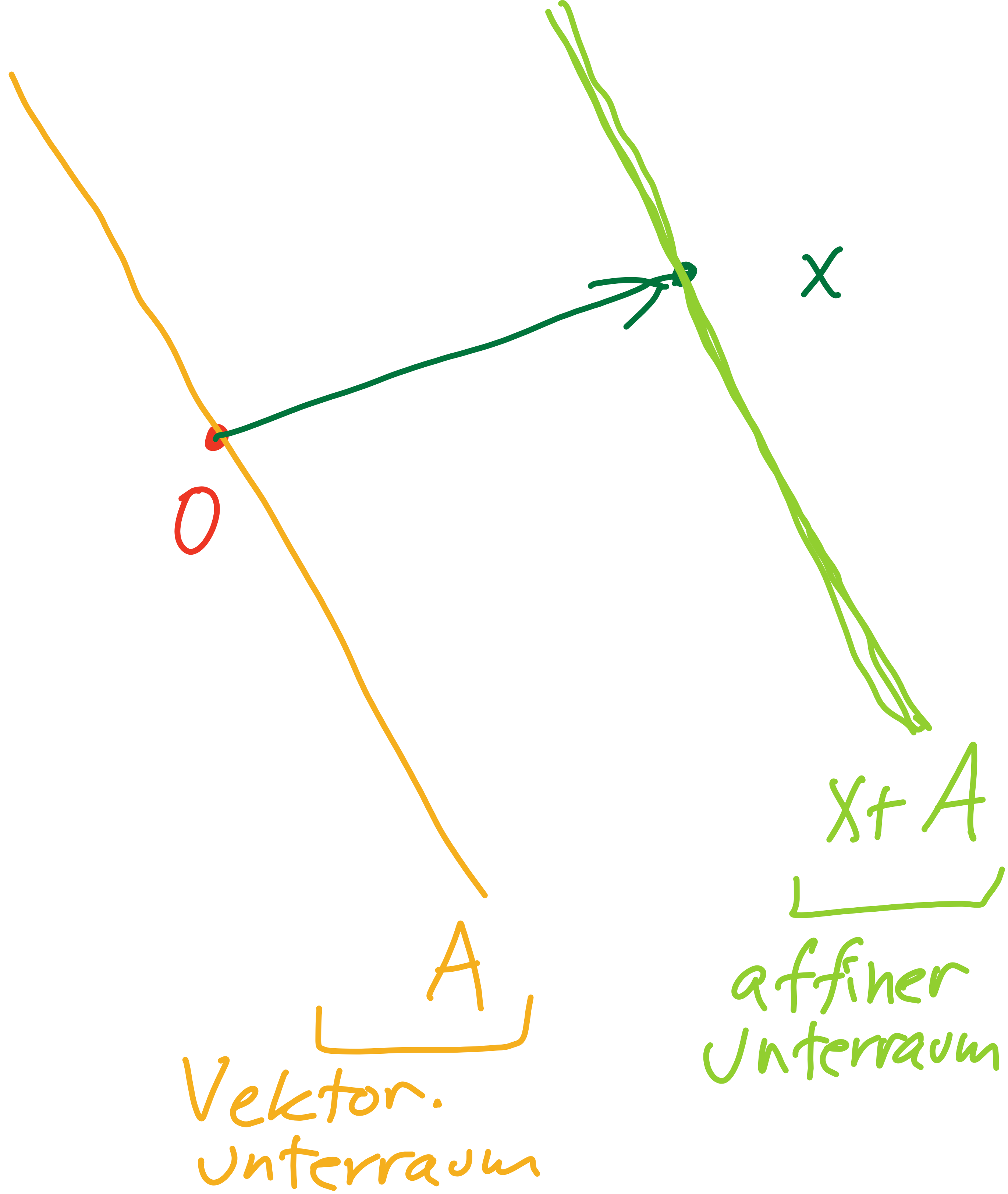
Beweis Ähnlich.

Affine Unterräume von $\mathbb{R}^n$

Def (1) Ein <u>k-dimensionaler</u> <u>affiner</u> <u>Unterraum</u> von $\mathbb{R}^n$, oder <u>k-Ebene</u>, ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ der Form

$$x + A$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n$, und A ein k-dimensionaler Vektorunterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.



x
0
A
x+A
Vektor.
unterraum
affiner
Unterraum

oder äquivalent

(2) Ein affiner Unterraum ist eine Teilmenge B von $\mathbb{R}^n$, die abgeschlossen bezüglich <u>affinen Kombinationen</u> ist.

<u>Def</u> Seien $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Ein Punkt

$$x = t_1 x_1 + \dots + t_k x_k,$$

wobei

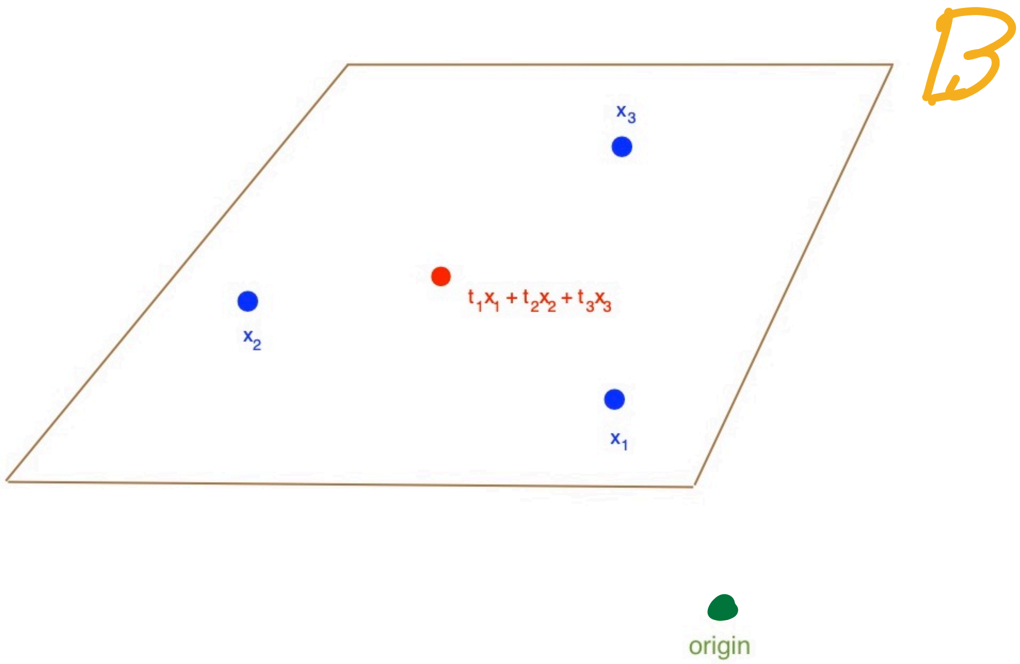
$$\boxed{t_1 + \dots + t_k = 1}$$

$t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R},$

heisst affine Kombination von $x_1, \ldots, x_k$.

D.h. x ist eine Art gewichteter Durchschnitt von $x_1, \ldots, x_k$, wobei negative Koeffizienten auch erlaubt sind.

$\mathbb{R}^3$:



Def $x_1, \ldots, x_{k+1}$ in $\mathbb{R}^n$ heissen affin-unabhängig, falls

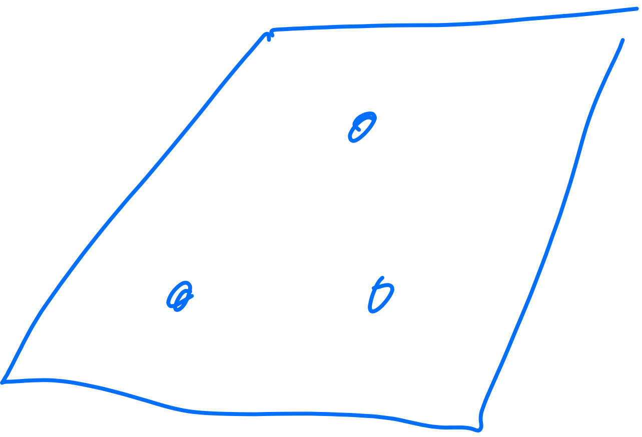
(1) Die sind nicht in einer gemeinsamen $(k-1)$-Ebene enthalten,

oder äquivalent

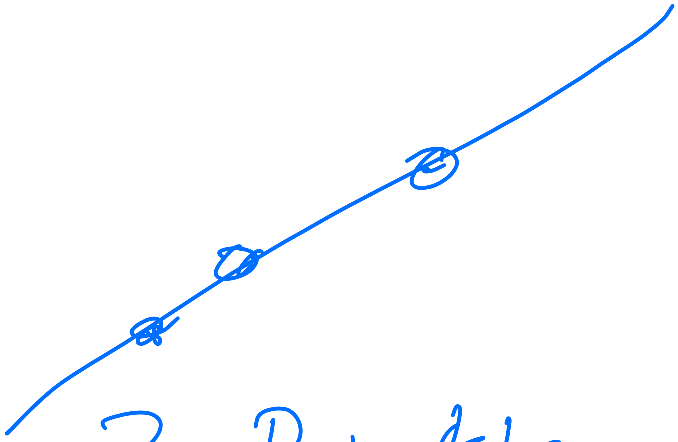
(2) Kein x_j ist eine affine Kombination der anderen x_i's.

Der Begriff "affin-unabhängig" verallgemeinert "nicht-kollinear" und "nicht-koplanar".

<u>Bmk</u> Die affine Kombinationen von $x_1, \dots, x_{k+1}$ bilden eine k-Ebene, falls die Punkte affin unabhängig sind. (Sonst bilden sie eine l-Ebene der niedrigeren Dimension)



3 Punkte
2-Ebene
unabhängig



3 Punkte
1-Ebene
abhängig.

Satz | Die Fixpunktmenge einer Isometrie von $\mathbb{R}^n$ ist stets ein affiner Unterraum.

Satz 2 Eine Isometrie von $\mathbb{R}^n$ auf sich ist durch ihre Werte bei $n+1$ affin-unabhängigen Punkten bestimmt.

Ohne Beweis.

Abschnitt 18 Abstrakte

Eigenschaften von Symmetrien:

1) ϕ, ψ Symmetrien von F
$\Rightarrow$ $\phi \circ \psi$ Symmetrie von F

2) ϕ Symmetrie von F
$\Rightarrow$ ϕ^{-1} existiert
ϕ^{-1} Symmetrie von F

3) id ist stets eine Symmetrie von F

4) $(\phi \circ \psi) \circ \chi$

$$= \phi \circ (\psi \circ \chi)$$

$\rightsquigarrow$ Gruppe

Abschnitt 19

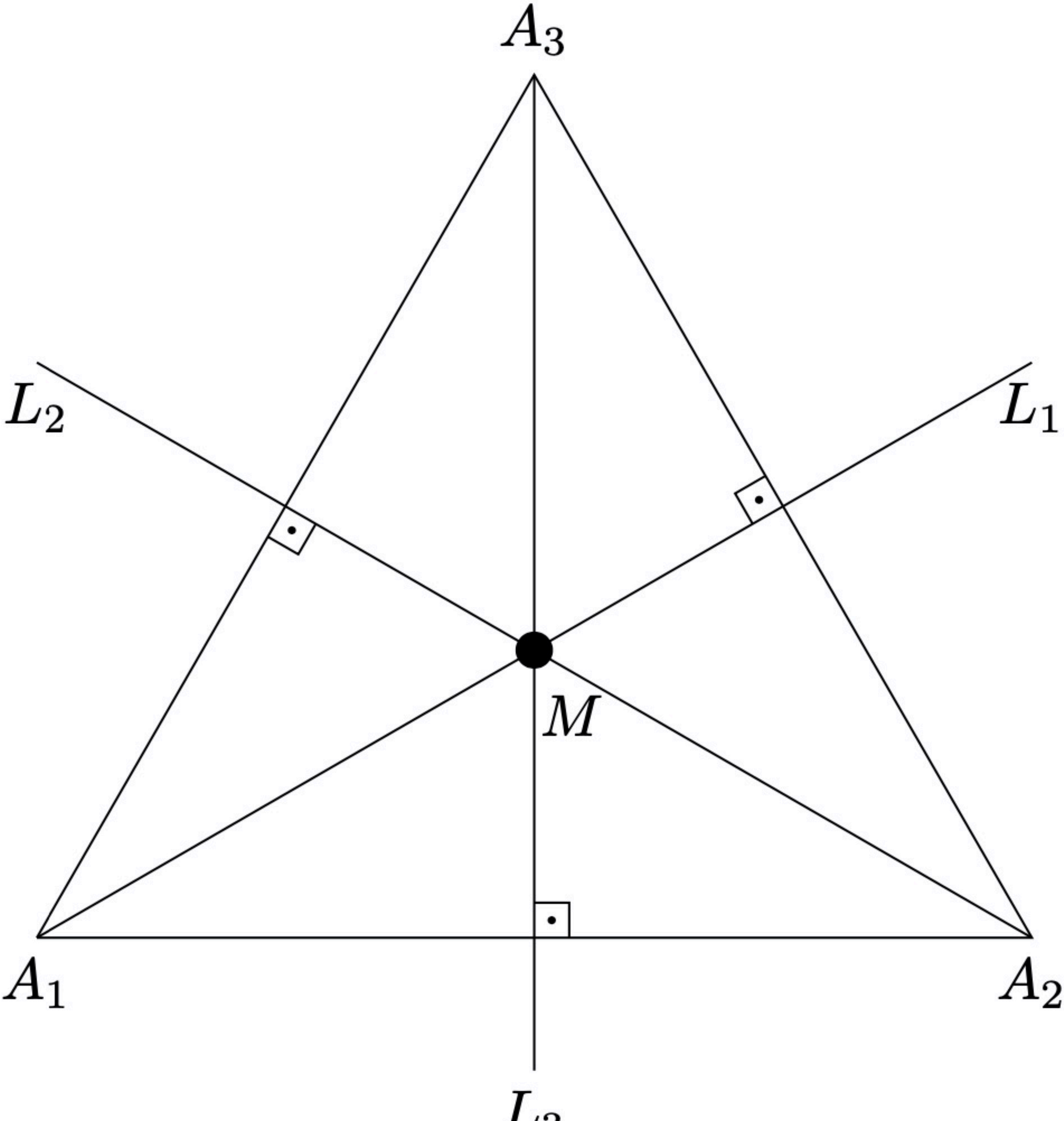
Symmetrien von Δ

Wir haben schon 6 Symmetrien von Δ gefunden:

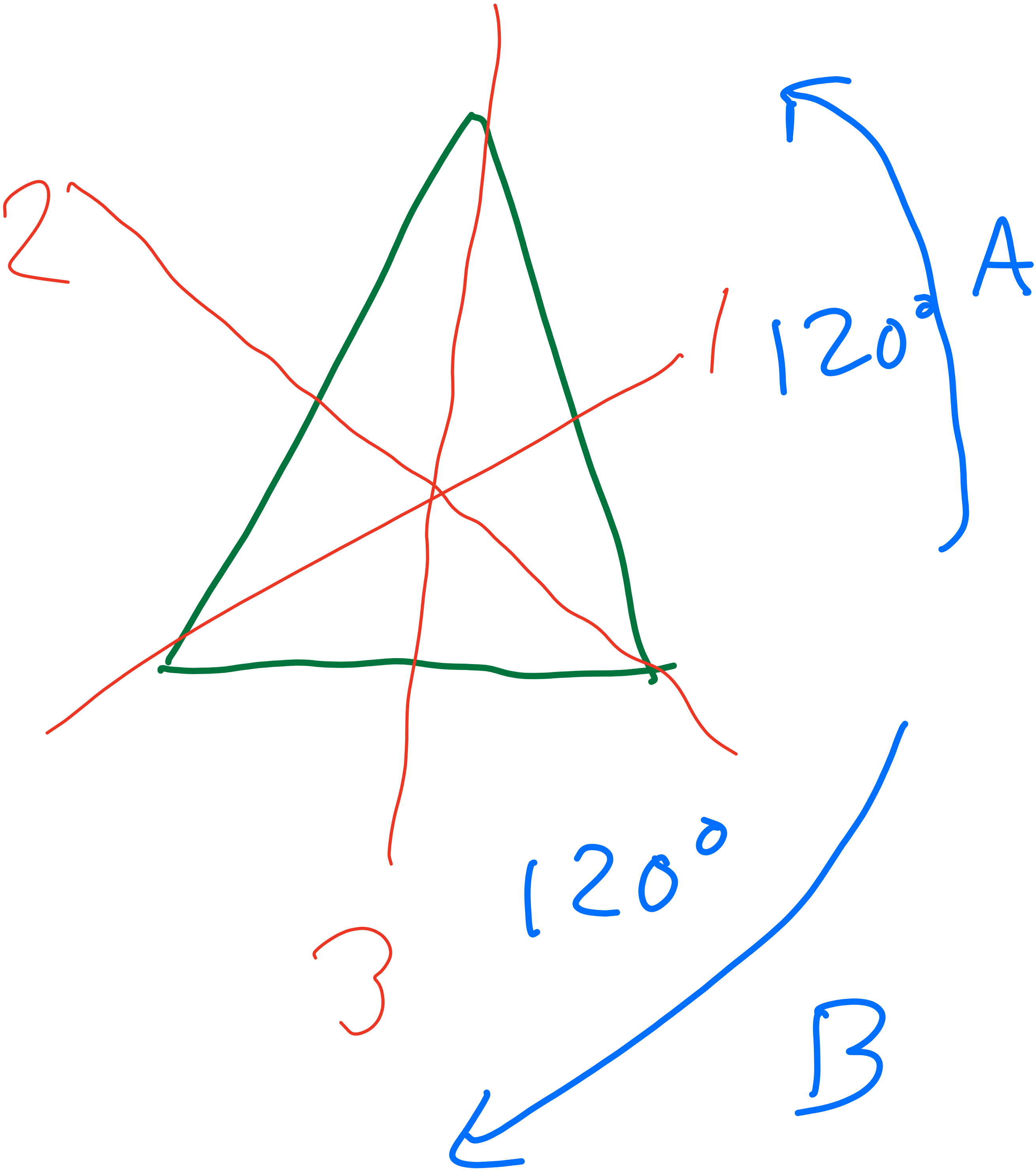
$$I, A, B, 1, 2, 3$$

Folgende Fragen:

- Ist diese Liste abgeschlossen bezüglich $\circ$ und $(\,)^{-1}$?
- Ist die Liste vollständig?



A_3
L_2
L_1
M
A_1
A_2
L_3



1, 2, 3 Spiegelungen

A, B Drehungen

I Identität

$$G = \{I, A, B, 1, 2, 3\}$$

$$G \leq \mathrm{Sym}(\Delta)$$

$$? \quad G = \mathrm{Sym}(\Delta)$$

Wir machen eine Tafel

$\circ$	I	A	B	1	2	3
I			$I \circ B$			
A						
B						
1						
2						
3						

Automatisch

$$I \circ \phi = \phi$$

$$\phi \circ I = \phi$$

$A \circ A = B$ $\quad 120+120 = 240$

$A \circ B = I$ $\quad 120+240 = 360 = 0$

$B \circ B = A$ $\quad 240+240 = 480 = 120$

$B \circ A = I$

und auch

$$1 \circ 1 = I$$

$$2 \circ 2 = I$$

$$3 \circ 3 = I$$

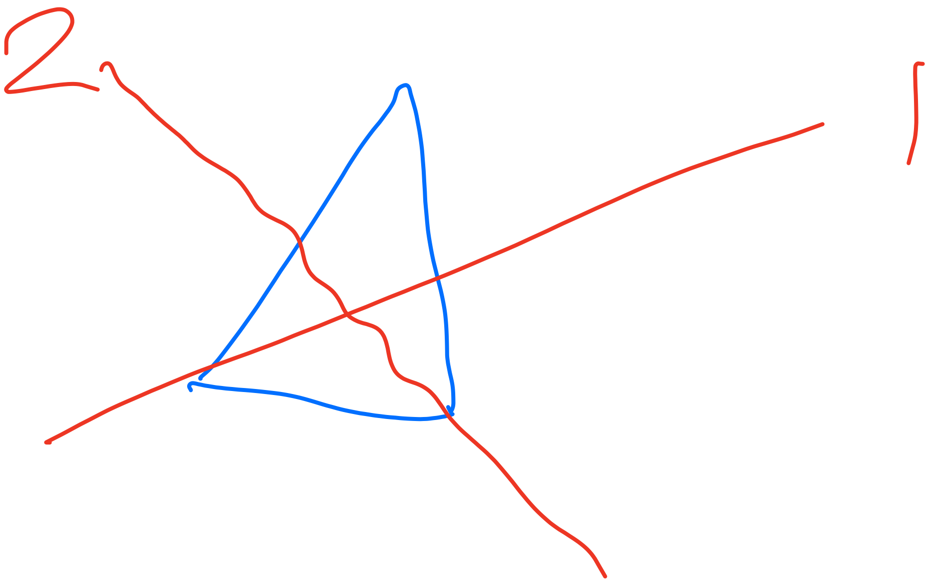
$$\left(\text{Spiegelung}^2 = I\right)$$

Tafel 1

$\circ$	I	A	B	1	2	3
I	I	A	B	1	2	3
A	A	B	I			
B	B	I	A			
1	1			I		
2	2				I	
3	3					I

Berechne

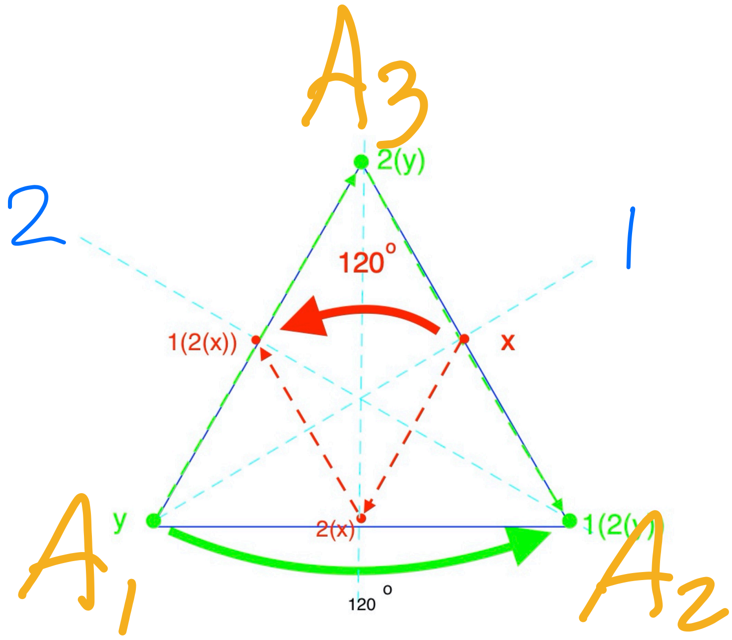
$$1 \circ 2 = ?$$



Spiegelung ∘ Spiegelung

= Drehung

$1 \circ 2$

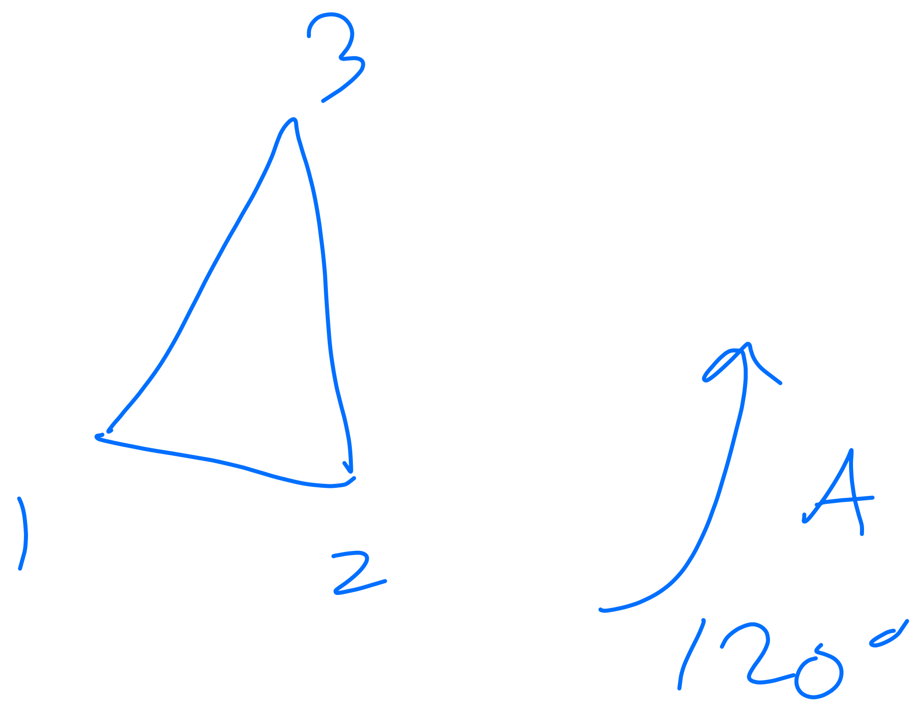


$$A_1 \xrightarrow{2} A_3 \xrightarrow{1} A_2$$
$$A_2 \xrightarrow{2} A_2 \xrightarrow{1} A_3$$
$$A_3 \xrightarrow{2} A_1 \xrightarrow{1} A_1$$

Als $1 \circ 2$:
$$A_1 \to A_2$$
$$A_2 \to A_3$$
$$A_3 \to A_1$$

Aber das ist die gleiche Wirkung auf die Eckpunkte wie die Drehung A:

$$A: \begin{array}{l} A_1 \to A_2 \\ A_2 \to A_3 \\ A_3 \to A_1 \end{array}$$



Also stimmen $1 \circ 2$ und A auf drei nicht-kollinearen Punkte (Eckpunkte A_1, A_2, A_3) überein.

Also nach der Aussage, haben wir

$$\boxed{1 \circ 2 = A}$$

$+ \int 20^{\circ}$

Auf ähnlicher Weise, haben wir

$$\boxed{2 \circ 1 = B} \; !!$$

-120°

$$\boxed{1 \circ 2 \neq 2 \circ 1} \; !!$$

Die Multiplikation ist nicht kommutativ.

$\circ$	I	A	B	1	2	3
I	I	A	B	1	2	3
A	A	B	I			
B	B	I	A			
1	1			I	$\boxed{A}$	
2	2			$\boxed{B}$	I	
3	3					I

Beobachtung:

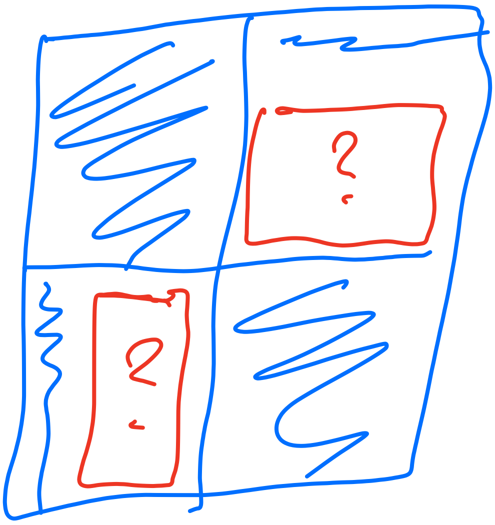
103, 301, 203, 302

sind alle Drehungen

Prinzip

Bei solchen Tafeln erscheint jedes Element genau einmal in jeder Zeile und jeder Spalte.

$\circ$	I	A	B	1	2	3
I	I	A	B	1	2	3
A	A	B	I			
B	B	I	A			
1	1			I	$\boxed{A}$	B
2	2			$\boxed{B}$	I	A
3	3			A	B	I



$$A \circ 1 = (3 \circ 1) \circ 1$$

$$= 3 \circ (1 \circ 1)$$

$$= 3 \circ id$$

$$= 3$$

$$\boxed{A \circ 1 = 3}$$

$\circ$	I	A	B	1	2	3
I	I	A	B	1	2	3
A	A	B	I	$\boxed{3}$	1	2
B	B	I	A	2	3	1
1	1	$\boxed{2}$	3	I	A	B
2	2	3	1	B	I	A
3	3	1	2	A	B	I

Frage 1 ist beantwortet:

$G = \{I, A, B, 1, 2, 3\}$

ist abgeschlossen bez. $\circ$