D-MATH
Prof. Manfred Einsiedler

Algebra I

HS20

Serie 1

Kommutative Ringe

1. Seien R und S Ringe und $f\colon R \to S$ ein Ringisomorphism. Zeigen Sie, dass f^{-1} ein Ringhomomorphismus ist.

2. (a) Zeigen Sie, dass die Subtraktion auf $\mathbb{Z}$ keine assoziative Operation ist.

   (b) Geben Sie ein Beispiel eines kommutativen Rings R an, in welchem die Subtraktion assoziativ ist.

   Hinweis: Finden Sie heraus für welche $m \in \mathbb{Z}, m \geqslant 1$ der Ring $R = \mathbb{Z}_m$ ein Beispiel wie in (b) ist.

3. Sei R ein kommutativer Ring.

   (a) Sei $(S_i)_{i\in I}$ eine Familie von Unterringen von R. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i\in I} S_i$ wieder ein Unterring von R ist.

   (b) Für $X \subseteq R$ eine Teilmenge von R, definieren wir den *von X erzeugten Unterring*, geschrieben $\langle X\rangle$, als den Schnitt über alle Unterringe von R, die X enthalten. Zeigen Sie, dass $\langle X\rangle$ der kleinste Unterring ist, der X enthält, in dem Sinne, dass falls S ein Unterring von R ist mit $X \subseteq S$, dann gilt schon $\langle X\rangle \subseteq S$.

4. Sei $\mathbb{F}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der Körper mit zwei Elementen $0, 1$. Definiere

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{F}_2 \right\}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass R bezüglich Matrixaddition und -multiplikation ein kommutativer Ring ist.

   (b) Zeigen Sie, dass R ein Körper mit genau vier Elementen ist.

5. Sei $F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Menge aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Seien $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Teilmenge der stetigen Funktionen und $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Teilmenge der stetigen beschränkten Funktionen.

   (a) Überprüfen Sie, dass $F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring ist. Bestimmen Sie die Menge aller Einheiten $F(\mathbb{R}, \mathbb{C})^{\times}$.

   (b) Zeigen Sie, dass $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ Unterringe von $F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sind.

(c) Bestimmen Sie $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})^\times$ und $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})^\times$.

(d) Welche der folgenden Abbildungen sind Ringhomomorphismen?

i. $\varphi\colon F(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(\alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$;

ii. $\psi\colon C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$;

iii. $\eta\colon C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \mathrm{Re}(f(0))$;

iv. $\theta\colon \mathbb{Z} \to F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, die $n \in \mathbb{Z}$ auf die konstante Funktion mit Wert n schickt.

6. Sei R ein Ring mit mindestens zwei Elementen so dass für alle $a \in R$ gilt $a^2 = a$. Dann gilt

(a) R is kommutativ,

(b) $2a = 0$ für alle $a \in R$,

(c) hat R keine Nullteiler, so ist R isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.