D-MATH | Algebra I | HS20
Prof. Manfred Einsiedler

Serie 11

Freie Gruppen, Moduln

1. Seien K ein Körper und V und W K-Vektorräume mit $K[X]$-Modulstrukturen. Charakterisieren Sie $K[X]$-lineare Abbildungen $V \to W$.

2. Seien R, S zwei Ringe, M ein R-Modul und N ein S-Modul.

   (a) Zeigen Sie, dass $M \times N$ ein $R \times S$-Modul ist mit koordinatenweiser Skalarmultiplikation, d.h. für alle $(a, b) \in R \times S$, $(m, n) \in M \times N$ ist $(a, b) \cdot (m, n) = (am, bn)$.

   (b) Charakterisieren Sie die Untermoduln von $M \times N$ über $R \times S$.

3. (a) Zeigen Sie, dass jede endliche Gruppe der Ordnung $2m$ mit m ungerade die Form $G = N \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit einer endlichen Gruppe N der Ordnung m und einem Homomorphismus $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(N)$ hat.

   Hinweis: Betrachten Sie den Homomorphismus $G \xrightarrow{\varphi} S_{2m} \xrightarrow{\mathrm{sgn}} \{\pm 1\}$ und zeigen Sie, dass dieser surjektiv ist.

   (b) Zeigen Sie, dass zwei solche Gruppen mit demselben N genau dann isomorph sind, wenn die Bilder des Erzeugenden von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ unter den beiden Homomorphismen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(N)$ unter $\mathrm{Aut}(N)$ konjugiert sind.

4. Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heisst *Erzeugendensystem von M (als R-Modul)*, falls jedes Element in M eine endliche Linearkombination von Elementen in A mit Koeffizienten in R ist, d.h. für alle $m \in M$ existieren $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$, $r_1, \ldots, r_n \in R$ mit $m = \sum_{i=1}^n r_i a_i$.

   Sei $M = \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$ mit $1 < d_1 | d_2 | \ldots | d_n$. Zeigen Sie, dass jedes Erzeugendensystem von M (als $\mathbb{Z}$-Modul) mindestens n Elemente hat.

5. Sei F_n die freie Gruppe auf n Elementen, $n \geqslant 1$.

   (a) Zeigen Sie, dass $F_1 \cong \mathbb{Z}$ und, dass für alle $n \geqslant 2$, $F_n/[F_n, F_n] \cong \mathbb{Z}^n$.

   Hinweis: Versuchen Sie nicht $[F_n, F_n]$ zu bestimmen, sondern verwenden Sie die universellen Eigenschaften der freien (abelschen) Gruppen.

   (b) Zeigen Sie, dass für jedes $n \geqslant 1$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus $F_n \hookrightarrow F_2$ existiert.

   Hinweis: Sei F_n frei mit Erzeugenden $x_1, \ldots, x_n$ und sei F_2 frei mit Erzeugenden a, b und betrachten Sie $\varphi\colon F_n \to F_2$ den (nach der universellen Eigenschaft von F_n existierenden und eindeutigen) Gruppenhomomorphismus mit $\varphi(x_i) := a^i b a^{-i}$, für $1 \leqslant i \leqslant n$.

6. Untersuchen Sie, welche der folgenden durch Erzeugende und Relationen gegebenen Gruppen endlich sind, und erstellen Sie für diese eine Liste aller Elemente.

   (a) $G = \langle x, y \mid x^3 = y^2,\ x^2 = y^3 \rangle$

   (b) $G = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = yxyx^5 = 1 \rangle$

   (c) $G = \langle x, y \mid x^3 = y^2 = 1 \rangle$ *Hinweis:* Siehe Serie 8, Aufgabe 5(b).

   (d) $G = \langle x, y \mid xy^2 = y^3x,\ yx^2 = x^3y \rangle$