Serie 2

Quotientenkörper, Polynomringe, Ideale

1. (a) (**SAGE**) Erstellen Sie eine Liste aller Zahlen bis 100, die sich als Summe von 3 Quadratzahlen (ohne Vielfachheiten) schreiben lassen.

   Hinweis:

   i. Erstellen Sie zuerst eine ungeordnete Liste L aller Summen von 3 Quadratzahlen bis 100. Hier ist der Befehl *in range(n + 1)* (dies geht alle Zahlen von 0 bis n durch) hilfreich.

   ii. Gehen Sie im nächsten Schritt alle Zahlen von 1 bis 100 durch und überprüfen Sie, ob sie in der Liste L sind. Hier ist der Befehl *in L* (dies überprüft, ob ein Element in L liegt) hilfreich.

   (b) Verwenden Sie (a), um die Gesetzmssigkeit für die Darstellbarkeit von m als Summe von 3 Quadratzahlen zu erkennen.

2. Seien R und S zwei kommutative Ringe.

   (a) Zeigen Sie, dass die Menge $R \times S$, bezüglich komponentenweiser Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring ist.

   (b) Bestimmen Sie $(R \times S)^\times$.

   (c) Zeigen Sie, dass jedes Ideal in $R \times S$ von der Form $I \times J$ ist, wobei I ein Ideal in R, und J ein Ideal in S ist.

   (d) Zeigen Sie, dass es einen Ringisomorphism

   $$(R \times S)/(R \times \{0\}) \xrightarrow{\sim} S.$$

   gibt.

   (e) Finden Sie alle Ringhomomorphismen $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$.

3. Sei R ein kommutativer Ring.

   (a) Zeigen Sie, dass für jeden Integritätsbereich R gilt $(R[X])^\times = R^\times$. Kann $R[X]$ ein Körper sein?

   (b) Finde einen Ring R mit $(R[X])^\times \neq R^\times$.

   (c) Zeigen Sie, dass ein Polynom $f = a_n X^n + \ldots + a_0 \in R[X]$ genau dann invertierbar ist, wenn a_0 in R invertierbar ist und die Koeffizienten a_i für $1 \leqslant i \leqslant n$ nilpotent sind, wobei ein Element $a \in R$ *nilpotent* heisst, falls $a^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

4. Sei R ein Integritätsbereich.

   (a) Zeigen Sie, dass $R[[X]]$ ein Integritätsbereich ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $1 - X \in R[[X]]^\times$.

   (c) Als Verallgemeinerung von (b), zeigen Sie, dass

   $$R[[X]]^\times := \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n | a_0 \in R^\times \right\}.$$

   Hinweis: Finden Sie die Koeffizienten der inversen formalen Potenzreihe induktiv.

5. Sei R ein kommutativer Ring und sei $S \subseteq R$ eine Teilmenge, die bezüglich der Ringmultiplikation ein Untermonoid ist. (Es gilt also $1 \in S$ und $ss' \in S$ für alle $s, s' \in S$.) Auf der Menge $R \times S$ betrachten wir die durch

   $$(r, s) \sim (r', s') \iff \exists t \in S : (rs' - r's)t = 0$$

   definierte Relation.

   (a) Zeige, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

   (b) Es bezeichne $R[S^{-1}]$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ und $\frac{r}{s}$ die Äquivalenzklasse eines Elementes (r, s). Zeige, dass die durch

   $$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} := \frac{rs' + r's}{ss'} \text{ und } \frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'} := \frac{rr'}{ss'}$$

   definierten Verknüpfungen wohldefiniert sind und aus $R[S^{-1}]$ einen kommutativen Ring mit Nullelement $\frac{0}{1}$ und Einselement $\frac{1}{1}$ machen, die *Lokalisierung von R von S*.

   (c) Zeigen Sie, dass $\varphi : R \to R[S^{-1}]$, $r \mapsto \frac{r}{1}$ einen Ringhomomorphismus mit der folgenden Eigenschaft definiert: Für jeden Homomorphismus kommutativer Ringe $\psi : R \to R'$ mit der Eigenschaft $\psi(S) \subseteq (R')^\times$ existiert ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus $\psi_S : R[S^{-1}] \to R'$ mit $\psi_S \circ \varphi = \psi$. Ist φ immer injektiv?

   (d) Falls R ein Integritätsbereich ist und $S = R \setminus \{0\}$, zeigen Sie, dass $R[S^{-1}] = \mathrm{Quot}(R)$.

   (e) Seien $S = 2\mathbb{Z} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[S^{-1}] = \mathbb{Q}$.

6. (a) (**SAGE**) Verwenden Sie SAGE, um herauszufinden für welche Zahlen $m \in \{2, \ldots, 100\}$ ein $g \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ existiert so dass

   $$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times = \{g^k : k \in \mathbb{N}_0\}.$$

   Hinweis: Es genügt, die rechte Menge für $k < m$ zu betrachten.

   (b) Verwenden Sie (a), um eine Vermutung auszusprechen, wie man diese m charakterisieren könnte.