Serie 3

Faktorringe, Primideale, maximale Ideale

1. Ein *Pythagoreisches Tripel* ist ein Tripel von ganzen Zahlen $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ mit $x^2 + y^2 = z^2$. Wir nennen, ein Pythagoreisches Tripel (x, y, z) *primitiv*, falls x, y, z paarweise teilerfremd sind.
   (a) (**SAGE**) Erstellen Sie einen Plot aller Punkte (x, y), $|x|, |y| \leqslant 500$, die Teil eines Pythagoreischen Tripels sind.
   (b) Wie lassen sich Regelmässigkeiten in diesem Plot erklären?
   (c) Können Sie eine Vermutung über die Anzahl der primitiven Pythagoreischen Tripel aufstellen?

2. Sei R ein kommutativer Ring und I, J Ideale in R. Wir definieren das Ideal
   $$IJ := (\{ij : i \in I, j \in J\}).$$
   (a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{ij : i \in I, j \in J\}$ nicht notwendigerweise ein Ideal in R ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $IJ \subset I \cap J$ und finden Sie ein Beispiel, bei dem die Inklusion strikt ist.
   (c) Zeigen Sie, dass falls I und J koprim sind, dann gilt $I \cap J = IJ$.

3. (a) Welche der folgenden Ideale von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]$ sind prim? Welche sind maximal?
   Hinweis: Betrachten Sie den Faktorring.
      i. $(X, 2) \subset \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]$;
      ii. $(X) \subset \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]$.
   (b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Untersuche, wann der Ring $\mathbb{R}[X]/(X^2 + a)$ isomorph zu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, beziehungsweise zu $\mathbb{C}$, beziehungsweise zu keinem der beiden ist.

4. Sei R ein kommutativer Ring. Wir nehmen an, dass ein Ideal $I \subset R$ existiert, so dass
   $$R^\times = R \setminus I \tag{1}$$
   (a) Zeigen Sie, dass I ein maximales Ideal ist.
   (b) Zeigen Sie, dass I das eindeutige maximale Ideal von R ist.

(c) Umgekehrt nehmen wir an, dass I das eindeutige maximale Ideal eines kommutativen Ringes R ist. Zeigen Sie, dass $R^\times = R \setminus I$ gilt.

Einen kommutativen Ring mit der Eigenschaft (1) nennt man einen *lokalen* Ring.

5. (a) Seien R und S kommutative Ringe.

   i. Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $I \subset R$ und $J \subset S$ Ideale, so dass $\varphi(I) \subset J$. Zeigen Sie, dass ein eindeutiger Ringhomomorphismus $\overline{\varphi} : R/I \longrightarrow S/J$ existiert, so dass das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p_I"'] & S \arrow[d, "p_J"] \\ R/I \arrow[r, "\overline{\varphi}"'] & S/J \end{tikzcd}$$

   kommutiert, wobei wir mit p_I und p_J die kanonischen Projektionen bezeichnen, d.h. $\overline{\varphi} \circ p_I = p_J \circ \varphi$.

   ii. Was können wir über $\overline{\varphi}$ schliessen, wenn $I = \varphi^{-1}(J)$?

   (b) Sei R ein kommutativer Ring und $I_0 \subset R$ ein Ideal.

   i. Zeigen Sie, dass es eine Korrespondenz zwischen Idealen in R/I_0 und Idealen in R, die I_0 enthalten, gibt. (siehe Vorlesung)

   ii. Zeigen Sie, dass für ein Ideal $I \subset R$, das I_0 enthält, ein Ringisomorphismus

$$(R/I_0)/(I/I_0) \xrightarrow{\sim} R/I$$

   existiert.

   iii. Sei $I_0 \neq R$. Zeigen Sie, dass die maximalen (bzw. Prim-) Ideale von R/I_0 die Ideale I/I_0 sind, wobei $I \subset R$ ein maximales (bzw. Prim-) Ideal ist, das I_0 enthält.

   iv. Finden Sie alle Ideale von $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Welche sind prim? Welche sind maximal?

6. Sei R ein kommutativer Ring. Ein Element $x \in R$ heisst *nilpotent*, falls ein $n \geqslant 1$ mit $x^n = 0$ existiert.

   (a) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Menge der Nullteiler von R zusammen mit 0 ist ein Ideal von R.

   (b) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Menge I der nilpotenten Elemente von R ist ein Ideal von R.

   (c) Beweisen Sie: Für I wie in (b) enthält der Faktorring R/I ausser 0 keine nilpotenten Elemente.