D-MATH | Algebra I | HS20
Prof. Manfred Einsiedler

Serie 5

Faktorielle Ringe, Primelemente

1. (**SAGE**): Plotten Sie alle Primelemente p in $\mathbb{Z}[i]$ mit $p = a + ib$, $-20 \leqslant a, b \leqslant 20$.

   Hinweis: Nutzen Sie Symmetrien aus. Schlagen Sie die Befehle

   ```
   QuadraticField(n), .maximal_order()
   ```

   im Sage-Handbuch nach. Sie müssen den zweiten Befehl nicht wirklich verstehen. Das folgende Code-Snippet könnte hilfreich sein.

   ```
   K.<i>=QuadraticField(-1)
   R=K.maximal_order()
   R(5).is_prime()
   ```

2. Sei R ein Hauptidealring. Zeigen Sie, dass $a, b \in R \setminus \{0\}$ koprim als Elemente von R sind, genau dann, wenn $(a), (b)$ koprim als Ideale von R sind.

3. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $R = K[X^2, X^3] \subset K[X]$ ein Integritätsbereich, aber nicht faktoriell ist.

4. Sei R ein Integritätsbereich und seien $a, b \in R$. Wir nennen $d \in R$ ein *kleinstes gemeinsames Vielfaches* von a und b und schreiben $d \sim \mathrm{kgV}(a, b)$, falls

   $$a|d \quad \wedge \quad b|d \quad \wedge \quad \forall c \in R : (a|c \wedge b|c \;\Rightarrow\; d|c)$$

   gilt. Zeige:

   (a) Falls $\mathrm{kgV}(a, b)$ existiert, ist es bis auf Einheiten eindeutig bestimmt.

   (b) Existiert $\mathrm{kgV}(a, b)$, so existiert auch $\mathrm{kgV}(ac, bc)$ für jedes $c \in R$ und es gilt

   $$\mathrm{kgV}(ac, bc) \sim c \cdot \mathrm{kgV}(a, b).$$

   (c) Falls R faktoriell ist, existiert $\mathrm{kgV}(a, b)$ und es gilt

   $$\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b) \sim a \cdot b.$$

   (d) Ist R ein Hauptidealring, dann gilt $(a) \cap (b) = (d)$, wobei $d \sim \mathrm{kgV}(a, b)$.

5. Seien K ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom von ungeradem Grad. Zeigen Sie, dass
$$Y^2 + Y + f \in K[X, Y]$$
irreduzibel ist.

   Hinweis: Betrachten Sie $Y^2 + Y + f$ als Element von $R[Y]$ für $R := K[X]$.

6. Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie, dass jedes Ideal in R endlich erzeugt ist, genau dann, wenn jede aufsteigende Kette $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$ von Idealen in R stationär wird, d.h. es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $I_n = I_{n_0}$ für alle $n \geqslant n_0$.