Serie 6

Euklidische Ringe, irreduzible Elemente

1. Sei R der Ring der Eisensteinschen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}[\zeta]$ für $\zeta = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Zeigen Sie, dass
   (a) $\mathbb{Z}[\zeta]$ aus allen Elementen der Form $a + b\zeta$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ besteht,
   (b) $\mathbb{Z}[\zeta]$ ein euklidischer Ring bezüglich der Normfunktion $N(a + \zeta b) := (a + b\zeta)(a+b\overline{\zeta}) = a^2-ab+b^2$ ist, wobei $\overline{\zeta}$ das komplex konjugierte von ζ bezeichnet.

2. Zeigen Sie, dass es irreduzible Elemente $a, b \in \mathbb{C}[X, Y]$ gibt, so dass $(a) \neq (b)$ und $(a) + (b) \neq \mathbb{C}[X, Y]$.

3. Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome vom Grad $\leqslant 5$ in $\mathbb{F}_2[X]$.

4. (a) (**SAGE**) Programmieren Sie eine Methode mit zwei Parametern p und n, die eine Liste der irreduziblen monischen Polynome vom Grad n in $\mathbb{F}_p[X]$ berechnet, wobei $n \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl ist. Benutzen Sie diese Methode um ihr Ergebnis aus Aufgabe 3 zu überprüfen.
   (b) (**SAGE**) Benutzen Sie Aufgabenteil (a) um eine Methode mit zwei Parametern p und n zu schreiben, die die Anzahl der irreduziblen monischen Polynome vom Grad n in $\mathbb{F}_p[X]$ zurückgibt, wobei $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ und p eine Primzahl ist. Verwenden Sie diese Methode, um eine Vermutung über die Anzahl der irreduziblen monischen Polynome vom Grad 2 in $\mathbb{F}_p[X]$ in Abhängigkeit von p aufzustellen. Können Sie diese auch beweisen?

5. Sei R der Ring $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}, i\sqrt{5}]$. Zeigen Sie, dass
   (a) R aus allen Elementen der Form $a + bi\sqrt{5}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ besteht,
   (b) **Korrektur:** R ein euklidischer Ring bezüglich der Normfunktion
   $$\begin{aligned}\Phi(a + bi\sqrt{5}) := N(2^n(a + bi\sqrt{5})) = 2^{2n}(a^2 + 5b^2),\\ \text{mit } n \in \mathbb{Z} \text{ minimal, so dass } 2^n a, 2^n b \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$
   ist.
   Hinweis: Für $z = \frac{g}{f} = a + bi\sqrt{5}$ und $b \in \mathbb{Z} + [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ verwende $q = [a] + [b]i\sqrt{5}$, wobei $[a], [b]$ die nächsten ganzen Zahlen zu a, b bezeichnen. Ansonsten verwende die beste Approximation mit $a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Zeichnen Sie eine Skizze.

6. Sei R ein Integritätsbereich. Ein Polynom der Form $f(\underline{X}) = \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}} \underline{X}^{\underline{i}}$ in $R[X_1, \ldots, X_n]$, bei der die Summe sich nur über Multiindizes $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_n)$ mit $\sum_\nu i_\nu = d$ erstreckt, heisst *homogen vom Grad* d.

   (a) Zeigen Sie, dass as Produkt zweier homogener Polynome vom Grad d und d' homogen vom Grad $d + d'$ ist.

   (b) Zeigen Sie, dass jeder Teiler eines von Null verschiedenen homogenen Polynoms selbst homogen ist.

   (c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das homogene Polynom

$$P_a \;:=\; X^2 + Y^2 + Z^2 + aXY + aXZ + aYZ \;\in\; \mathbb{R}[X, Y, Z]$$

   irreduzibel?