Lösung 1

Kommutative Ringe

1. Seien R und S Ringe und $f\colon R \to S$ ein Ringisomorphism. Zeigen Sie, dass f^{-1} ein Ringhomomorphismus ist.

2. (a) Zeigen Sie, dass die Subtraktion auf $\mathbb{Z}$ keine assoziative Operation ist.

   (b) Geben Sie ein Beispiel eines kommutativen Rings R an, in welchem die Subtraktion assoziativ ist.

   Hinweis: Finden Sie heraus für welche $m \in \mathbb{Z}, m \geqslant 1$ der Ring $R = \mathbb{Z}_m$ ein Beispiel wie in (b) ist.

3. Sei R ein kommutativer Ring.

   (a) Sei $(S_i)_{i\in I}$ eine Familie von Unterringen von R. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i\in I} S_i$ wieder ein Unterring von R ist.

   (b) Für $X \subseteq R$ eine Teilmenge von R, definieren wir den *von X erzeugten Unterring*, geschrieben $\langle X \rangle$, als den Schnitt über alle Unterringe von R, die X enthalten. Zeigen Sie, dass $\langle X \rangle$ der kleinste Unterring ist, der X enthält, in dem Sinne, dass falls S ein Unterring von R ist mit $X \subseteq S$, dann gilt schon $\langle X \rangle \subseteq S$.

4. Sei $\mathbb{F}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der Körper mit zwei Elementen $0, 1$. Definiere

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{F}_2 \right\}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass R bezüglich Matrixaddition und -multiplikation ein kommutativer Ring ist.

   (b) Zeigen Sie, dass R ein Körper mit genau vier Elementen ist.

5. Sei $F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Menge aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Seien $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Teilmenge der stetigen Funktionen und $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Teilmenge der stetigen beschränkten Funktionen.

   (a) Überprüfen Sie, dass $F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring ist. Bestimmen Sie die Menge aller Einheiten $F(\mathbb{R}, \mathbb{C})^\times$.

   (b) Zeigen Sie, dass $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ Unterringe von $F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sind.

(c) Bestimmen Sie $C(\mathbb{R},\mathbb{C})^\times$ und $C_b(\mathbb{R},\mathbb{C})^\times$.

(d) Welche der folgenden Abbildungen sind Ringhomomorphismen?

   i. $\varphi\colon F(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(\alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$;

   ii. $\psi\colon C_b(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$;

   iii. $\eta\colon C(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \mathrm{Re}(f(0))$;

   iv. $\theta\colon \mathbb{Z} \to F(\mathbb{R},\mathbb{C})$, die $n \in \mathbb{Z}$ auf die konstante Funktion mit Wert n schickt.

Lösung:

(a) Die Operationen $+$ und $\cdot$ auf $F(\mathbb{R},\mathbb{C})$ sind punktweise definiert, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) := f(x)g(x).$$

Wir schreiben 0 beziehungsweise 1 für die konstanten Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit konstanten Wert 0 beziehungsweise 1. Wir definieren $-: F(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to F(\mathbb{R},\mathbb{C})$ als $(-f)(x) := -f(x)$. Wir überprüfen die Axiome eines kommutativen Rings. Für alle $a, b, c \in F(\mathbb{R},\mathbb{C})$ gilt:

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $(a + (b + c))(x) = a(x) + (b + c)(x) = a(x) + b(x) + c(x) = (a+b)(x)+c(x) = ((a+b)+c)(x)$, also $a+(b+c) = (a+b)+c$ (Addition ist assoziativ);
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $(a + b)(x) = a(x) + b(x) = b(x) + a(x) = (b + a)(x)$, also $a + b = b + a$ (Addition ist kommutativ);
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $(0 + a)(x) = 0(x) + a(x) = 0 + a(x) = a(x)$, also $0 + a = a$ (0 ist neutrales Element bezüglich Addition);
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $(a + (-a))(x) = a(x) + (-a)(x) = a(x) + (-a(x)) = 0 = 0(x)$, also $a + (-a) = 0$ (die Abbildung "$-$" ist das Inverse der Addition);
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $(a \cdot (b \cdot c))(x) = a(x)(b \cdot c)(x) = a(x)b(x)c(x) = (a \cdot b)(x)c(x) = ((a \cdot b) \cdot c)(x)$,also $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Multiplikation ist assoziativ);
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $(a \cdot b)(x) = a(x)b(x) = b(x)a(x) = (b \cdot a)(x)$, also $a \cdot b = b \cdot a$ (Multiplikation ist kommutativ);
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1 \cdot a)(x) = 1(x) \cdot a(x) = 1 \cdot a(x) = a(x)$, also $1 + a = a$ (1 ist neutrales Element bezüglich Multiplikation);
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $(a \cdot (b+c))(x) = a(x)(b+c)(x) = a(x)(b(x)+c(x)) = a(x)b(x) + a(x)c(x) = (a \cdot b)(x)+(a \cdot c)(x)$, also $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivität).

Sei $f \in F(\mathbb{R},\mathbb{C})^\times$ mit multiplikativem Inversem g. Das bedeutet $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)g(x) = 1$. Also $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Andererseits ist jede komplexe Zahl ungleich null $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ invertierbar, das heisst falls $f \in F(\mathbb{R},\mathbb{C})$ nirgendwo den Wert null annimmt, dann können wir $g(x) := \frac{1}{f(x)}$ definieren und dies ist ein multiplikatives Inverses von f in $F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Insgesamt erhalten wir $F(\mathbb{R}, \mathbb{C})^\times = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0\}$.

(b) Offensichtlich gilt, dass $C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Wir zeigen zuerst, dass $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ Ringe sind. Die konstanten Funktionen 0 und 1 sind stetig und beschränkt, das heisst sie sind Elemente von $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Ausserdem wissen wir aus Analysis, dass falls f, g stetige Funktionen sind, dann sind auch $f + g$, $-f$ und fg stetig, das heisst die Einschränkung von $+, -, \cdot$ der Ringoperationen von $F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ auf $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ macht aus $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ einen Ring. Die Axiome können analog zu (a) überprüft werden.

Sind f, g zusätzlich beschränkt dann existieren Zahlen $M_f, M_g \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $|f(x)| < M_f$ und $|g(x)| < M_g$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
|(f+g)(x)| &\leqslant |f(x)| + |g(x)| < M_f + M_g,\\
|(-f)(x)| &= |-f(x)| = |f(x)| < M_f,\\
|(f \cdot g)(x)| &= |f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < M_f M_g,
\end{aligned}$$

was bedeutet, dass $f + g$, $-f$ und $f \cdot g$ beschränkt sind. Das bedeutet, dass die Einschränkung von $+, -, \cdot$ der Ringoperationen von $F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ auf $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ aus $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ einen Ring macht. Die Axiome können analog zu (a) überprüft werden.

Wir müssen noch überprüfen, dass die Inklusionen $\mathrm{id}\colon C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $\mathrm{id}\colon C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ Ringhomomorphismen sind. Es gilt offensichtlich, dass die konstante Funktion 1 auf die konstante Funktion 1 abgebildet wird. Jetzt bleibt noch zu überprüfen, dass id die Addition und Multiplikation respektiert. Dies ist klar, da $+, \cdot$ auf $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ durch Einschränkung der Ringoperationen von $F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ definiert wurden. Das heisst, $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sind Unterringe von $F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(c) Ist $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})^\times$ bzw. in $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})^\times$, dann ist f^{-1} in $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bzw. in $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und damit auch in $F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Daraus folgt, dass

$$C(\mathbb{R}, \mathbb{C})^\times \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap F(\mathbb{R}, \mathbb{C})^\times, \quad C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})^\times \subseteq C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap F(\mathbb{R}, \mathbb{C})^\times,$$

und nach Teil a) können wir uns auf Funktionen f beschränken mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Aus Analysis wissen wir, dass falls so eine Funktion stetig ist, so ist es auch die Funktion $1/f$. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
C(\mathbb{R}, \mathbb{C})^\times &= C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap F(\mathbb{R}, \mathbb{C})^\times\\
&= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0 \text{ und } f \text{ ist stetig}\}.
\end{aligned}$$

Sei nun $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap F(\mathbb{R}, \mathbb{C})^\times$. Da das Inverse eines Elementes eindeutig ist, ist f invertierbar in $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ genau dann, wenn $1/f$ in $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist, was genau dann der Fall ist, wenn $1/f$ beschränkt ist (es ist immer stetig). Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|(1/f)(x)| < N_f \iff |f(x)| > 1/N_f,$$

d.h. f ist invertierbar genau dann, wenn $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $|f(x)| > \varepsilon$ für alle $x \in X$. Also folgt

$$C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})^\times = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists \varepsilon > 0 \, \exists N > 0 \, \forall x \in X : \varepsilon < |f(x)| < N \\ \text{und } f \text{ ist stetig} \end{array} \right\}.$$

(d) $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist kein Integritätsbereich. Betrachte die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$f_1(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \text{ or } x > 1, \\ x - x^2 & \text{if } x \in [0,1]; \end{cases}$$
$$f_2(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x < -1 \text{ or } x > 0, \\ -x - x^2 & \text{if } x \in [-1,0]. \end{cases}$$

Diese sind stetig (da $f_1(0) = f_1(1) = 0$ und $f_2(-1) = f_2(0) = 0$) und beschränkt, da beide nach $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ abbilden und einen maximalen Wert von $\frac{1}{4} = f_1(\frac{1}{2}) = f_2(-\frac{1}{2})$ annehmen. Dies zeigt ausserdem, dass $f_1 \neq 0 \neq f_2$. Es gilt aber, dass $f_1 \cdot f_2 = 0$, da $f_1(x) = 0$ für $x \leqslant 0$ und $f_2(x) = 0$ für $x > 0$, und somit $f_1(x) f_2(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also sind f_1 und f_2 Nullteiler und damit ist $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ kein Integritätsbereich.

(e) i. φ ist ein Ringhomomorphismus. Es gilt $\varphi(1) = 1(\alpha) = 1$, und für $f, g \in F(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gilt

$$\varphi(f+g) = (f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha) = \varphi(f) + \varphi(g)$$
$$\varphi(f \cdot g) = (f \cdot g)(\alpha) = f(\alpha) g(\alpha) = \varphi(f) \varphi(g).$$

φ nennt man auch den Einsetzungs- oder Auswertungshomomorphismus.

ii. ψ ist kein Ringhomomorphismus, da ψ die Addition nicht respektiert. Betrachte beispielsweise $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\, f(x) = \sin(x),\ g(x) = -\sin(x)$. Dann gilt $|f(x)| = |g(x)| = |\sin(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (also $f, g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$), aber da $|f(\pi/2)| = |g(\pi/2)| = 1$ gilt $\sup |f| = \sup |g| = 1$. Daraus folgt, dass $\psi(f) = \psi(g) = 1$. Andererseits gilt $f + g = 0$, also

$$\psi(f+g) = 0 \neq 2 = \psi(f) + \psi(g).$$

iii. η ist kein Ringhomomorphismus, da η die Multiplikation nicht respektiert. Beispielsweise seien $f = g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die konstanten Funktionen mit Wert i. Dann gilt $f \cdot g = -1$ und, da $\mathrm{Re}(i) = 0$ und $\mathrm{Re}(-1) = -1$, dass

$$\eta(fg) = -1 \neq 0 = 0 \cdot 0 = \eta(f)\eta(g).$$

iv. θ ist ein Ringhomomorphismus. Es gilt, dass $1_{\mathbb{Z}}$ auf die konstante Abbildung 1 geschickt wird, und für alle $n, m \in \mathbb{Z}$, ist die Summe (bzw. das Produkt) der konstanten Funktionen mit Wert n mit der konstanten Funktion mit Wert m die konstante Funktion mit Wert $n+m$ (bzw. nm).

6. Sei R ein Ring mit mindestens zwei Elementen so dass für alle $a \in R$ gilt $a^2 = a$. Dann gilt

   (a) R ist kommutativ,

   (b) $2a = 0$ für alle $a \in R$,

   (c) hat R keine Nullteiler, so ist R isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   Lösung:

   (a) Für $a, b \in R$ betrachte $a + b = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b$. Daraus folgt $ab = -ba$. Wenn wir für $a = b = 1$ wählen erhalten wir $1 = -1$. Zusammen mit der ersten Überlegung erhalten wir somit $ab = ba$, d.h. R ist kommutativ.

   (b) Für $a \in R$ gilt $ab = -ba$ für alle $b \in R$. Für $b = 1$ erhalten wir $a = -a$, was äquivalent zu $2a = 0$ ist.

   (c) Wir können die Bedingung $a^2 = a$ umschreiben zu $a(a - 1) = 0$. Da R nullteilerfrei ist, folgt schon, dass $a = 0$ oder $a = 1$. Daraus folgt direkt, dass R isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.