Lösung 10

Auflösbare & nilpotente Gruppen, Sylowsätze, Symmetrische Gruppen

1. Sei S_n die symmetrische Gruppe mit $n \geqslant 2$.
   (a) Sei $\sigma \in S_n$ ein k-Zykel mit $k \leqslant n$. Berechnen Sie $\operatorname{sgn}(\sigma)$.
   (b) Zeigen Sie, dass S_n von Transpositionen erzeugt wird.

2. (a) Sei $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_m \in S_n$ das Produkt von m disjunkten Zykeln. Zeigen Sie, dass die Ordnung von σ das kleinste gemeinsame Vielfache der Längen der Zykel $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ ist.
   (b) (**SAGE**): Schreiben Sie ein Verfahren, das berechnet wie viele Elemente in S_n von jeder Ordnung es gibt.
   (c) Testen Sie Ihr Verfahren für S_7. Versuchen Sie zum Beispiel folgende Fragen zu beantworten.
   - Wie viele Elemente der Ordnung 1, 2, 10 gibt es?
   - Was ist die grösste Ordnung eines Elementes?
   - Was ist die kleinste ganze Zahl für die es kein Element dieser Ordnung gibt?

   Kommentieren Sie für welche n Sie denken, dass der Computer schneller ist als Sie, um diese Fragen zu beantworten.

3. (a) Seien $G_1 < G_2$ Gruppen, deren Ordnungen durch p teilbar sind. Sei H_1 eine p-Sylowuntergruppe von G_1. Zeigen Sie, dass es eine p-Sylowuntergruppe H_2 von G_2 gibt, so dass $H_1 = H_2 \cap G_1$.
   (b) Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Wir definieren den *Normalisator $N_G(H)$ von H in G* als

   $$N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

   Der Normalisator von H in G ist eine Untergruppe von G und die grösste Untergruppe von G, in der H normal ist.

   Sei G eine endliche Gruppe und P eine p-Sylowuntergruppe von G. Zeigen Sie, dass für beliebige Untergruppen H von G gilt:

   $$N_G(P) \subseteq H \implies H = N_G(H).$$

4. (a) Zeigen Sie, dass Untergruppen und Faktorgruppen auflösbarer Gruppen wieder auflösbar sind.

   (b) Zeigen Sie, dass nilpotente Gruppen auflösbar sind.

   Hinweis: Verwenden Sie eine Induktion nach dem Nilpotenzgrad der Gruppe.

5. (a) Sei $n \geqslant 3$. Zeigen Sie, dass $[S_n, S_n] = A_n$.

   Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass A_n für $n \geqslant 5$ einfach ist.

   (b) Bestimmen Sie einen Repräsentanten und die Kardinalität aller Konjugationsklassen in S_5.

Lösung:

(a) Wir betrachten den Vorzeichenhomomorphismus $\mathrm{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$. Es gilt $[S_n, S_n] \subseteq \ker(\mathrm{sgn}) = A_n$, da das Inverse einer Permutation den gleichen Zykeltyp hat.

Um zu zeigen, dass $A_n \subseteq [S_n, S_n]$ betrachten wir die Fälle $n < 5$ und $n \geqslant 5$ separat. Für $n \geqslant 5$ wissen wir aus dem Hinweis, dass A_n einfach ist. Wir bemerken, dass $1 \neq [(1\,2),(2\,3)] \in [S_n, S_n] \lhd S_n$, so dass $\{1\} \neq [S_n, S_n] \lhd A_n$ und somit ist $[S_n, S_n] = A_n$. Für $n = 3$ ist $A_n = \{1, (123), (132)\}$ und wir rechnen nach, dass $[(12)(13)] = (123)$ und $[(12)(23)] = (132)$, woraus folgt, dass $A_3 \subset [S_3, S_3]$. Für $n = 4$ ist

$$A_4 = \{1, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3), (1,2,3), (1,3,2), (1,3,4), \\ (1,4,3), (1,2,4), (1,4,2), (2,3,4), (2,4,3)\}.$$

Nach einer ähnlichen Rechnung wie oben können wir alle 3-Zykel als Kommutatoren schreiben. Jede Permutation, die aus zwei 2-Zykeln besteht, kann sich als Produkt von zwei 3-Zykeln schreiben, z.B. $(123)(234) = (12)(34)$, und da $[S_n, S_n]$ eine Untergruppe ist, folgt, dass auch die Permutationen, die aus zwei 2-Zykeln bestehen in $[S_4, S_4]$ liegen und somit $A_4 \subseteq [S_4, S_4]$.

(b) Es wurde in der Vorlesung gezeigt, dass zwei Elemente der symmetrischen Gruppe S_n in der gleichen Konjugationsklasse liegen genau dann, wenn sie den gleichen Zykeltyp haben, wobei wir nun auch 1-Zykel einbauen, um über ungeordnete Partitionen von n sprechen zu können. Das heisst um die Konjugationsklassen von S_5 zu bestimmen müssen wir die Partitionen von 5 bestimmen. Wir erhalten:

- $5 = 5$, die triviale Partition. Wir erhalten die Konjugationsklasse der 5-Zykel, $[(1\,2\,3\,4\,5)]$. Nun müssen wir die Anzahl der 5-Zykel in S_5 bestimmen. Ein 5-Zykel kann immer in der Form $(1\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4)$ geschrieben werden, und verschiedene Wahlen von $(a_1\,a_2\,a_3\,a_4)$ geben verschiedene 5-Zykel. Daher gibt es $4! = 24$ Elemente in dieser Konjugationsklasse.

- $5 = 4 + 1$. Dies korrespondiert zu der Klasse der 4-Zykel, $[(1\,2\,3\,4)]$. Die Anzahl der 4-Zykel in S_5 kann leicht bestimmt werden. Es gibt 5 Teilmengen von 4 Elementen in $\{1, \ldots, 5\}$. Für jede von diesen können wir den 4-Zykel mit dem kleinsten Element beginnen, und die restlichen drei frei wählen. Daher gibt es $5 \cdot 3! = 30$ Elemente in dieser Klasse.
- $5 = 3 + 2$. Dies korrespondiert zu der Klasse $[(1\,2)(3\,4\,5)]$. Wir bemerken zuerst, dass es $\binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten gibt 2 Elemente in $\{1, \ldots, 5\}$ auszuwählen. Für diese ist der 2-Zykel bereits bestimmt und der 3-Zykel kann so gewählt werden, dass er mit dem kleinsten Element der restlichen drei Zahlen beginnt, und die restlichen zwei beliebig, was weitere 2! Möglichkeiten gibt. Daher enthält diese Klasse $10 \cdot 2 = 20$ Elemente.
- $5 = 3 + 1 + 1$. Dies korrespondiert zu der Klasse von 3-Zykeln $[(1\,2\,3)]$. Es gibt $\binom{5}{3} = 10$ Teilmengen mit 3 Elementen in $\{1, \ldots, 5\}$. Für jede von diesen gibt es 2! viele mögliche 3-Zykeln. Daher enthält diese Konjugationsklasse $10 \cdot 2 = 20$ Elemente.
- $5 = 2 + 2 + 1$. Dies korrespondiert zu der Klasse $[(1\,2)(3\,4)]$. Wir bemerken, dass es $\frac{1}{2!}\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 15$ Möglichkeiten gibt, zwei disjunkte Tupel von Elementen aus $\{1, \ldots, 5\}$ auszuwählen (ohne Reihenfolge). Daher folgt, dass diese Konjugationsklasse 15 Elemente enthält.
- $5 = 2 + 1 + 1 + 1$. Dies korrespondiert zu der Klasse von 2-Zykeln $[(1\,2)]$. Es gibt $\binom{5}{2} = 10$ Teilmengen mit 2 Elementen in $\{1, \ldots, 5\}$. Für jede dieser Teilmengen ist der 2-Zykel bereits bestimmt. Daher gibt es in dieser Klasse 10 Elemente.
- $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Dies korrespondiert zu der Klasse [id], welche nur aus einem Element besteht.

Wir erhalten die folgenden Konjugationsklassen:

Partition	Repräsentant	Kardinalität
$5 = 5$	$(1\,2\,3\,4\,5)$	24
$5 = 4 + 1$	$(1\,2\,3\,4)$	30
$5 = 3 + 2$	$(1\,2)(3\,4\,5)$	20
$5 = 3 + 1 + 1$	$(1\,2\,3)$	20
$5 = 2 + 2 + 1$	$(1\,2)(3\,4)$	15
$5 = 2 + 1 + 1 + 1$	$(1\,2)$	10
$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	id	1

6. Gegeben seien zwei Gruppen N und H, sowie ein Gruppenhomomorphismus $\theta : H \to \mathrm{Aut}(N)$, $h \mapsto \theta_h$ der Gruppe H in die Gruppe der Automorphismen von N. Wir definieren das *semi-direkte Produkt von N und H (mittels θ)* als das kartesische Produkt $N \times H$ zusammen mit der Verknüpfung

$$(n, h) \cdot (n', h') := (n\,\theta_h(n'), hh')$$

und schreiben dafür $N \rtimes_\theta H$. Wir bemerken, dass falls $\theta(h) = \mathrm{Id}_N$ für alle $h \in H$, so ist $N \rtimes_\theta H = N \times H$.

(a) Zeigen Sie, dass $N \rtimes_\theta H$ eine Gruppe ist.

(b) Zeigen Sie, dass $N \times \{1_H\}$ normal in $N \rtimes_\theta H$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass A_4 und $D_{2\cdot n}$ semi-direkte Produkte sind.

Lösung:

(a) Seien 1_N und 1_H die neutralen Elemente von N beziehungsweise H. Für $(n,h) \in N \times H$ gilt $(n,h)\cdot(1_N,1_H) = (n,h) = (1_N,1_H)\cdot(n,h)$, und somit $(1_N,1_H)$ ein neutrales Element. Ausserdem ist $(n,h)\cdot(\theta_{h^{-1}}(n^{-1}),h^{-1}) = (1_N,1_H) = (\theta_{h^{-1}}(n^{-1}),h^{-1})\cdot(n,h)$. Nun ist nur noch Assoziativität zu prüfen. Diese gilt in der zweiten Koordinate, da wir dort nur Gruppenmultiplikation in H betrachten und diese assoziativ ist. Wir berechnen für $(n,h),(n',h')$, $(n'',h'') \in N \times H$

$$\begin{aligned}(n,h)\cdot[(n',h')\cdot(n'',h'')] &= (n,h)\cdot(n'\,\theta_{h'}(n''),h'h'')\\ &= (n\,\theta_h(n'\,\theta_{h'}(n'')),hh'h'')\\ &= (n\,\theta_h(n')\,\theta_{hh'}(n''),hh'h'')\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}[(n,h)\cdot(n',h')]\cdot(n'',h'') &= (n\,\theta_h(n'),hh')\cdot(n'',h'')\\ &= (n\,\theta_h(n')\,\theta_{hh'}(n''),hh'h''),\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(b) Wir zeigen zuerst, dass $N \times \{1_H\}$ eine Untergruppe ist. Seien dazu $(n,1_H)$, $(n',1_H) \in N \times \{1_H\}$. Wir rechnen

$$(n,1_H)\cdot(n',1_H) = (n\,\theta_{1_H}(n'),1_H) = (n\,n',1_H) \in N \times \{1_H\},$$

und somit ist $N \times \{1_H\}$ abgeschlossen unter Multiplikation und Inversenbildung.

Seien nun $(n_0,1_H) \in N \times \{1_H\}$ und $(n,h) \in N \times H$ beliebig. Wir berechnen

$$\begin{aligned}(n,h)\cdot(n_0,1_H)\cdot(n,h)^{-1} &= (n\,\theta_h(n_0),h)\cdot(\theta_{h^{-1}}(n^{-1}),h^{-1})\\ &= (n\,\theta_h(n_0)\,\theta_h(\theta_{h^{-1}}(n^{-1})),1_H) \in N \times \{1_H\},\end{aligned}$$

und damit ist $N \times \{1_H\}$ normal in $N \rtimes_\theta H$.

Ohne zu rechnen, kann man direkt sehen, dass die zweite Koordinate unter Konjugation wieder trivial ist, da wir in der zweiten Koordinate nur Gruppenmultiplikation in H haben.

(c) Sei V_4 die Kleinsche Vierergruppe und $f : V_4 \to V_4$ der Homomorphismus, der $(12)(34)$ auf $(14)(23)$, $(13)(24)$ auf $(12)(34)$, und $(14)(23)$ auf $(13)(24)$ schickt. Betrachte den Homomorphismus $\theta : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle h \rangle \to \mathrm{Aut}(V_4)$, $h \mapsto f$. Wir wollen zeigen, dass $A_4 \cong V_4 \rtimes_\theta \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Sei $N := [A_4, A_4]$. Dann ist N normal in A_4 und isomorph zu V_4 (siehe Vorlesung), mit Quotient $A_4/N \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle (123)N \rangle$ (A_4 hat 12 Elemente). Man rechnet leicht nach, dass Konjugation mit (123) auf V_4 den gleichen Effekt hat wie Anwendung des Automorphismus f, das heisst wir können einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi : A_4 \to V_4 \rtimes_\theta \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ definieren. Da beide Gruppen die gleiche Kardinalität haben ist dieser Homomorphismus auch injektiv.

Wir wollen zeigen, dass $D_{2\cdot n} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\theta \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, wobei $\theta : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle s \rangle \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), s \mapsto (y \mapsto y^{-1})$. Wähle $t \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle t \rangle$. Definiere

$$\varphi : D_{2\cdot n} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\theta \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad T \mapsto (t, 1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}),\ S_0 \mapsto (1_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}, s),$$

wobei T die Rotation um $2\pi/n$ bezeichnet und S_0 die Spiegelung, die durch komplexe Konjugation gegeben ist (siehe die Notation aus Serie 8, Aufgabe 6). Wir wissen bereits, dass $D_{2\cdot n}$ von S_0 und T erzeugt wird, genauer

$$D_{2\cdot n} = \langle S_0, T \mid S_0^2 = T^n = 1,\ S_0 T S_0^{-1} = T^{-1} \rangle.$$

Um zu überprüfen, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist, müssen wir nur überprüfen, dass die Relationen unter φ erfüllt sind, das heisst

$$\begin{aligned}
\varphi(T)^n = (t^n, 1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}) = (1_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}) = \varphi(T^n),\\
\varphi(S_0)^2 = (1_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}, s^2) = (1_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}) = \varphi(S_0^2),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\varphi(S_0)\varphi(T)\varphi(S_0^{-1}) &= (1_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}, s) \cdot (t, 1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}) \cdot (1_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}, s)^{-1}\\
&= (\theta_s(t), s) \cdot (1_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}, s^{-1})\\
&= (\theta_s(t), 1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}})\\
&= (t^{-1}, 1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}) = \varphi(T^{-1}),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. Es gilt, dass φ surjektiv ist, und da beide Gruppen endlich sind mit der gleichen Anzahl von Elementen, ist φ auch injektiv und damit ist $D_{2\cdot n}$ ein semi-direktes Produkt.