Lösung 11

Freie Gruppen, Moduln

1. Seien K ein Körper und V und W K-Vektorräume mit $K[X]$-Modulstrukturen. Charakterisieren Sie $K[X]$-lineare Abbildungen $V \to W$.

2. Seien R, S zwei Ringe, M ein R-Modul und N ein S-Modul.

   (a) Zeigen Sie, dass $M \times N$ ein $R \times S$-Modul ist mit koordinatenweiser Skalarmultiplikation, d.h. für alle $(a, b) \in R \times S$, $(m, n) \in M \times N$ ist $(a, b) \cdot (m, n) = (am, bn)$.

   (b) Charakterisieren Sie die Untermoduln von $M \times N$ über $R \times S$.

3. (a) Zeigen Sie, dass jede endliche Gruppe der Ordnung $2m$ mit m ungerade die Form $G = N \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit einer endlichen Gruppe N der Ordnung m und einem Homomorphismus $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(N)$ hat.

   Hinweis: Betrachten Sie den Homomorphismus $G \xrightarrow{\varphi} S_{2m} \xrightarrow{\mathrm{sgn}} \{\pm 1\}$ und zeigen Sie, dass dieser surjektiv ist.

   (b) Zeigen Sie, dass zwei solche Gruppen mit demselben N genau dann isomorph sind, wenn die Bilder des Erzeugenden von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ unter den beiden Homomorphismen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(N)$ unter $\mathrm{Aut}(N)$ konjugiert sind.

4. Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heisst *Erzeugendensystem von M (als R-Modul)*, falls jedes Element in M eine endliche Linearkombination von Elementen in A mit Koeffizienten in R ist, d.h. für alle $m \in M$ existieren $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$, $r_1, \ldots, r_n \in R$ mit $m = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$.

   Sei $M = \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$ mit $1 < d_1 | d_2 | \ldots | d_n$. Zeigen Sie, dass jedes Erzeugendensystem von M (als $\mathbb{Z}$-Modul) mindestens n Elemente hat.

5. Sei F_n die freie Gruppe auf n Elementen, $n \geqslant 1$.

   (a) Zeigen Sie, dass $F_1 \cong \mathbb{Z}$ und, dass für alle $n \geqslant 2$, $F_n/[F_n, F_n] \cong \mathbb{Z}^n$.

   Hinweis: Versuchen Sie nicht $[F_n, F_n]$ zu bestimmen, sondern verwenden Sie die universellen Eigenschaften der freien (abelschen) Gruppen.

   (b) Zeigen Sie, dass für jedes $n \geqslant 1$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus $F_n \hookrightarrow F_2$ existiert.

   Hinweis: Sei F_n frei mit Erzeugenden $x_1, \ldots, x_n$ und sei F_2 frei mit Erzeugenden a, b und betrachten Sie $\varphi \colon F_n \to F_2$ den (nach der universellen Eigenschaft von F_n existierenden und eindeutigen) Gruppenhomomorphismus mit $\varphi(x_i) := a^i b a^{-i}$, für $1 \leqslant i \leqslant n$.

Lösung:

(a) Sei F_n frei mit Erzeugenden $x_1, \dots, x_n$. Nach der universellen Eigenschaft der freien Gruppe ist ein Homomorphismus von F_n in eine Gruppe eindeutig dadurch bestimmt, wohin er $x_1, \dots, x_n$ schickt.

Betrachte $\varphi : F_1 \to \mathbb{Z}, x_1 \mapsto 1$. Dies ist ein Homomorphismus und bijektiv, da $\varphi(x_1^n) = n$.

Sei nun $n \geqslant 2$. Wir betrachten $\psi : F_n \to \mathbb{Z}^n, x_i \mapsto (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, mit dem nicht-Null Eintrag an der i-ten Stelle, für alle $i = 1, \dots, n$. Nach der universellen Eigenschaft ist ψ ein Homomorphismus und surjektiv.

Wir behaupten, dass $\ker(\psi) = [F_n, F_n]$. Da $[F_n, F_n]$ von Kommutatoren erzeugt wird und $\mathbb{Z}^n$ abelsch ist, folgt, dass $[F_n, F_n] \subseteq \ker(\psi)$ und damit faktorisiert die Abbildung ψ über den Quotienten $F_n/[F_n, F_n]$, und wir erhalten eine Abbildung $\overline{\psi} : F_n/[F_n, F_n] \to \mathbb{Z}^n$.

Da $F_n/[F_n, F_n]$ abelsch ist, existiert nach der universellen Eigenschaft der freien abelschen Gruppe $\mathbb{Z}^n$ ein eindeutiger Homomorphismus von abelschen Gruppen

$$\alpha : \mathbb{Z}^n \to F_n/[F_n, F_n], (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \mapsto x_i[F_n, F_n].$$

Nun lässt sich nachrechnen, dass α und $\overline{\psi}$ invers zueinander sind und somit ist $F_n/[F_n, F_n] \cong \mathbb{Z}^n$.

(b) Sei F_n frei mit Erzeugenden $x_1, \dots, x_n$ und sei F_2 frei mit Erzeugenden a, b. Sei $\varphi\colon F_n \to F_2$ der (nach der universellen Eigenschaft von F_n existierende und eindeutige) Homomorphismus mit $\varphi(x_i) := a^i b a^{-i}$, für $1 \leqslant i \leqslant n$. Wir wollen zeigen, dass φ injektiv ist.

Sei $w \in F_n$. Wir können w als reduziertes Wort $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_k}^{\varepsilon_k}$ schreiben, mit $1 \leqslant i_1, \dots, i_k \leqslant n$ und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{\pm 1\}$. Dann ist

$$\varphi(w) = a^{i_1} b^{\varepsilon_1} a^{i_2 - i_1} b^{\varepsilon_2} a^{i_3 - i_2} \cdots a^{i_k - i_{k-1}} b^{\varepsilon_k} a^{-i_k}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist ein reduziertes Wort, und da F_2 frei über $\{a, b\}$ ist, ist das durch ihn beschriebene Gruppenelement genau dann trivial (also $w \in \operatorname{Kern} \varphi$), wenn das Wort Länge 0 hat. Das ist gleichbedeutend mit $k = 0$, also mit $w = 1_{F_n}$, was zu zeigen war.

6. Untersuchen Sie, welche der folgenden durch Erzeugende und Relationen gegebenen Gruppen endlich sind, und erstellen Sie für diese eine Liste aller Elemente.

(a) $G = \langle x, y \mid x^3 = y^2,\, x^2 = y^3 \rangle$

(b) $G = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = yxyx^5 = 1 \rangle$

(c) $G = \langle x, y \mid x^3 = y^2 = 1 \rangle$ *Hinweis:* Siehe Serie 8, Aufgabe 5(b).

(d) $G = \langle x, y \mid xy^2 = y^3 x,\, yx^2 = x^3 y \rangle$

Lösung:

(a) Aus den gegebenen Relationen folgt

$$x^2 = y^3 = y^2 y = x^3 y$$

und daraus durch Multiplikation mit x^{-3} von links $x^{-1} = y$. Darum ist G von x erzeugt und zyklisch. Zudem ergibt sich

$$x^5 = x^2 x^3 = y^{-2} y^2 = 1.$$

Somit ist G endlich und G hat höchstens die 5 Elemente 1, x, x^2, x^3, x^4.
Durch $x \mapsto 1$ und $y \mapsto -1$ wird ein Homomorphismus $G \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ definiert, denn 1 und -1 genügen in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ denselben Relationen wie x und y in G:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1 &= 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 &= 3 \cdot (-1) \end{aligned}$$

Dieser Homorphismus ist surjektiv, da 1 ganz $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ erzeugt. Daher müssen $1,\, x,\, x^2, x^3, x^4$ paarweise verschieden sein und es gilt

$$G = \{1,\, x,\, x^2,\, x^3,\, x^4\} \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

(b) Wegen $x^8 = 1$ und $y^2 = 1$ haben x und y endliche Ordnung und insbesondere können x^{-1} und y^{-1} als $x^{-1} = x^7$ und $y^{-1} = y$ dargestellt werden. Deshalb kann jedes Element von G als Wort in x und y geschrieben werden. Wegen $x^8 = 1$ ist die von x erzeugte Untergruppe $\langle x \rangle$ ein Quotient von $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Aus den gegebenen Relationen folgt

$$yxy^{-1} = yxy = x^{-5} = x^3,$$

daher gilt $y\langle x \rangle y^{-1} = \langle x^3 \rangle$. Wegen $(x^3)^3 = x^9 = x$ ist $\langle x^3 \rangle$ gleich $\langle x \rangle$ und somit liegt y im Normalisator von $\langle x \rangle$. Klarerweise liegt aber auch x im Normalisator von $\langle x \rangle$, daher ist dieser gleich ganz G und $\langle x \rangle$ ist normal in G. Da G von x und y erzeugt wird und die Nebenklasse von x in $G/\langle x \rangle$ trivial ist, ist die Faktorgruppe $G/\langle x \rangle$ erzeugt von der Nebenklasse $y\langle x \rangle$ und ein Quotient von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, da $y^2 = 1$ ist. Somit kann jedes Element von G als x^i oder $x^i y$ mit $0 \leqslant i < 8$ dargestellt werden.

Wir müssen nun noch zeigen, dass diese 16 Elemente paarweise verschieden sind. Dazu zeigen wir, dass G das semidirekte Produkt des Normalteilers $\langle x \rangle$ mit der Untergruppe $\langle y \rangle$ ist und dass x die Ordnung 8 sowie y die Ordnung 2 hat. Dafür betrachten wir das semidirekte Produkt der endlichen zyklischen Gruppen $N := \langle a \,|\, a^8 = 1 \rangle$ und $H := \langle b \,|\, b^2 = 1 \rangle$ bezüglich der Operation ${}^{b}a := a^3$ von H auf der Gruppe N (dies definiert in der Tat eine Operation von $H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf N, da ${}^b({}^b a) = (a^3)^3 = a^9 = a$). Durch $x \mapsto a$ und $y \mapsto b$ wird ein Homomorphismus $G \to N \rtimes H$ definiert, denn die Elemente $(a, 1)$ und $(1, b)$ genügen denselben Relationen in $N \rtimes H$ wie x und y in G:

$$\begin{aligned}
(a,1)^8 &= (a^8, 1) = (1,1) \\
(1,b)^2 &= (1, b^2) = (1,1) \\
(1,b)(a,1)(1,b)(a,1)^5 &= (a^3, b)(1,b)(a^5, 1) = (a^3, 1)(a^5, 1) = (1,1)
\end{aligned}$$

Unter diesem Homomorphismus werden die Elemente x^i, $x^i y, 0 \leqslant i < 8$ genau auf die 16 verschiedenen Elemente von $N \rtimes H$ abgebildet. Daher besteht G tatsächlich genau aus den 16 Elementen x^i, $x^i y, 0 \leqslant i < 8$ und ist isomorph zum semidirekten Produkt $N \rtimes H$.

(c) Wir betrachten die Matrizengruppe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ mit den Elementen $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (der Einfachkeit halber schreiben wir die Elemente von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ als Matrizen in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, meinen damit aber die Nebenklassen der entsprechenden Matrizen). Diese Elemente erfüllen $A^3 = 1$ und $B^2 = 1$ in $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Daher wird durch $x \mapsto A$ und $y \mapsto B$ ein Homomorphismus $\varphi : G \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ definiert. Unter φ wird yx auf

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

abgebildet. Dieses Element ist wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von unendlicher Ordnung in $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Daher hat $\mathrm{Bild}(\varphi)$ unendliche Ordnung und insbesondere ist G unendlich.

Bemerkung: Es lässt sich sogar zeigen, dass φ ein Isomorphismus von G nach $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ ist.

Variante: Die Gruppe G lässt sich durch

$$x \mapsto \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad y \mapsto \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

auf eine unendliche Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ abbilden. Unter diesem Homomorphismus wird nämlich yxy^{-1} auf

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und somit $yxy^{-1}x$ auf

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

abgebildet, was ein Element unendlicher Ordnung ist. Daraus folgt auch, dass G unendlich ist.

(d) Wegen $yx^2 = x^3y$ ist $y = x^3yx^{-2}$. Einsetzen in $xy^2 = y^3x$ ergibt

$$x^4yxyx^{-2} = x(x^3yx^{-2})^2 = (x^3yx^{-2})^3x = x^3yxyxyx^{-1},$$

also nach Multiplizieren mit x^{-3} von links und x^2 von rechts

$$(xy)^2 = (yx)^3.$$

Da die definierenden Relationen von G symmetrisch in x und y sind, folgt auch

$$(yx)^2 = (xy)^3.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt wie bei (a)

$$xy = (yx)^{-1} = x^{-1}y^{-1},$$

was äquivalent zu $x^2 = y^{-2}$ ist. Einsetzen in $yx^2 = x^3y = xx^2y$ liefert nun

$$y^{-1} = yy^{-2} = xy^{-2}y = xy^{-1},$$

also $x = 1$. Schliesslich folgt $y^2 = xy^2 = y^3x = y^3$ und somit auch $y = 1$. Die Gruppe G ist also trivial.