Lösung 8

Untergruppen, Zentrum, Konjugation

1. Sei G eine Gruppe mit Einselement e und $H \subseteq G$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) H ist eine Untergruppe von G,

   (b) $e \in H$ und $a, b \in H \implies ab \in H$ und $a^{-1} \in H$,

   (c) H ist eine Gruppe und $\iota : H \to G$, $h \mapsto h$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

   Ist H eine endliche Teilmenge, zeigen Sie, dass auch die folgende Aussage zu den obigen Aussagen äquivalent ist:

   (d) H ist nicht leer, und $a, b \in H \implies ab \in H$.

2. (a) Bestimmen Sie das Zentrum der symmetrischen Gruppe $Z(S_n)$ für alle $n \geqslant 2$.

   (b) Zeigen Sie, dass $Z(\mathrm{GL}_n(K)) = \left\{ \begin{pmatrix} t & & \\ & \ddots & \\ & & t \end{pmatrix} : t \in K^\times \right\}$ für alle $n \geqslant 1$.

   (c) Zeigen Sie, dass $Z(\mathrm{SL}_n(K)) = \left\{ \begin{pmatrix} t & & \\ & \ddots & \\ & & t \end{pmatrix} : t \in K^\times, t^n = 1 \right\}$ für alle $n \geqslant 1$.

3. Sei G eine Gruppe mit Einselement e.

   (a) Zeigen Sie, dass "konjugiert zueinander sein" eine Äquivalenzrelation auf G definiert.

   (b) Sei $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Zeigen Sie, dass $\varphi(Z(G)) = Z(G)$, $\varphi([G, G]) = [G, G]$ und für alle $g \in G$ gilt, dass $\mathrm{ord}(\varphi(g)) = \mathrm{ord}(g)$, wobei wir mit $\mathrm{ord}(g)$ die Ordnung von g bezeichnen.

   (c) Folgern Sie, dass $Z(G)$ und $[G, G]$ invariant unter Konjugation sind.

   Bemerkung: Eine Untergruppe $H < G$ mit der Eigenschaft $\varphi(H) = H$ für alle $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ heisst *charakteristisch*. Aus (b) folgt, dass $Z(G)$ und $[G, G]$ charakteristische Untergruppen von G sind. Können Sie weitere (möglicherweise triviale) Beispiele von charakteristischen Untergruppen finden?

4. Sei G eine Gruppe mit Einselement e.

(a) Zeigen Sie, dass falls $g^2 = e$ für alle $g \in G$ gilt, so ist G abelsch.

(b) Finden Sie eine nicht-abelsche Gruppe G mit der Eigenschaft, dass $g^3 = e$ für alle $g \in G$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie die Heisenberg-Gruppe über $\mathbb{F}_3$.

5. Bestimmen Sie die Ordnung der folgenden Elemente:

(a) i, $e^{i\sqrt{3}\pi}$ und $e^{\frac{2\pi i}{17}}$ in der Gruppe $\mathbb{C}^\times$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ in der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$;

(c) $1, 2$ und 3 in $\mathbb{F}_{17}^\times$.

Lösung:

(a) Nach Definition gilt $i^2 = -1 \neq 1$, und damit $i^4 = 1$, und da $i^3 = -i \neq 1$, können wir folgern, dass i Ordnung 4 hat. Für $r \in \mathbb{R}$ gilt $e^{ir} = 1$ genau dann, wenn $r = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und betrachte

$$w_n := (e^{i\sqrt{3}\pi})^n = e^{i\sqrt{3}n\pi} \text{ und } z_n := (e^{\frac{2\pi i}{17}})^n = e^{\frac{2\pi i}{17}n}.$$

Der Exponent in der ersten komplexen Zahl kann nicht von der Form $2\pi ik$ für eine ganze Zahl k sein, da die Gleichheit $2\pi ik = i\sqrt{3}\pi n$ implizieren würde, dass $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, was falsch ist. Daraus folgt, dass $e^{i\sqrt{3}\pi}$ unendliche Ordnung hat. Es ist klar, dass $z_{17} = 1$, und dass $\frac{2\pi i}{17}n = 2\pi ik$ für eine ganze Zahl k genau dann, wenn $17|n$, woraus folgt, dass die Ordnung von $e^{\frac{2\pi i}{17}}$ gerade 17 ist.

(b) Eine Rechnung zeigt $A^2 = -\mathrm{Id}_2$ und $A^3 \neq \mathrm{Id}_2$, woraus folgt, dass A Ordnung 4 hat. Analog rechnet man nach, dass $B^3 = -\mathrm{Id}_2$ und damit $B^6 = \mathrm{Id}_2$, und keine kleinere Potenz von B ist gleich Id_2, was zeigt, dass B Ordnung 6 hat. Mit Induktion kann man zeigen, dass $(AB)^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dies zeigt, dass $(AB)^n \neq \mathrm{Id}_n$ für $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, und damit hat AB unendliche Ordnung (obwohl sowohl A als auch B endliche Ordnung haben).

Die Matrix $C := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ hat unendliche Ordnung, da sie Determinante 5 hat und damit gilt $\det(C^n) = 5^n$. Daher ist $C^n \neq \mathrm{Id}_2$ für $n > 0$, da $\det(\mathrm{Id}_2) = 1$.

(c) Da 1 das neutrale Element von $\mathbb{F}_{17}^\times$ ist hat es Ordnung 1 per Definition. Für die anderen beiden Elemente betrachten wir einige ihrer Potenzen modulo 17.

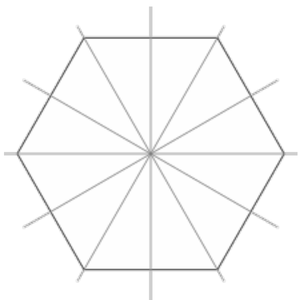
$$2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16 = -1,\ 2^8 = (-1)^2 = 1.$$

Für $k \in \{5,6,7\}$ wissen wir, dass $2^k \neq 1$, da ansonsten $2^{8-k} = 2^8 \cdot (2^k)^{-1} = 1$, was ein Widerspruch zu den oben berechneten Potenzen von 2 wäre. Dies impliziert, dass $\mathrm{ord}_{\mathbb{F}_{17}^\times}(2) = 8$.

$$3^2 = 9,\ 3^3 = 27 = 10,\ 3^4 = 30 = 13 = -4,\ 3^8 = 16 = -1,\ 3^{16} = 1.$$

Wegen dieser Rechnung erhalten wir für $h \in \{12,13,14,15\}$, dass $(3^h)^{-1} = 3^{16-h} \neq -1$. Ausserdem gilt für $h \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$, dass $3^{8+k} = 3^8 \cdot 3^k = -3^k$, woraus wir folgern, dass $3^\ell \neq 1$ für $4 < \ell < 12$, und damit gilt $\mathrm{ord}_{\mathbb{F}_{17}^\times}(3) = 16$.

6. Sei $n \geqslant 2$ eine ganze Zahl. Wie in der Vorlesung bezeichnen wir mit D_{2n} die Gruppe der Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$, die das reguläre n-gon auf sich selbst abbilden. Das Bild unten zeigt für $n = 6$ die Symmterieachsen der 6 Symmetrien des regulären 6-gons:



   (a) Wir definieren für $\zeta = e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$, $T := [z \mapsto \zeta z]$ als die Rotation um $2\pi/n$ und $S := [z \mapsto \zeta^k \overline{z}]$ als eine der n Spiegelungen, $k = 0, \ldots, n-1$. Zeigen Sie, dass $STS^{-1} = T^{-1}$.

   (b) Bestimmen Sie die Konjugationsklassen der Elemente von D_{2n}.

   (c) Bestimmen Sie $Z(D_{2n})$ for all $n \geqslant 2$.

   (d) Zeigen Sie, dass $[D_{2n}, D_{2n}] = C_n$, falls n ungerade ist.
   Erinnerung: $C_n = \langle T \rangle$ ist die Untergruppe von D_{2n}, die aus den Rotationen besteht.

   (e) Bestimmen Sie die Untergruppen von $D_{2\cdot 4}$ und D_{2p} für p prim.

Lösung:

   (a) Wir rechnen

$$STS^{-1}(z) = ST\zeta^k\overline{z} = S\zeta^{k+1}\overline{z} = \zeta^k\zeta^{-k-1}z = \zeta^{-1}z = T^{-1}(z).$$

(b) Aus (a) folgt direkt, dass $ST^kS^{-1} = T^{-k}$ und damit, dass die Rotationen T^k und T^{-k} in einer Konjugationsklasse liegen, und keine weiteren Elemente enthalten (da alle Rotationen kommutieren).

Nun wollen wir die Konjugationsklassen der Spiegelungen verstehen. Wir bemerken dass jede der n Spiegelungen $S_k := [z \mapsto \zeta^k \overline{z}]$ geschrieben werden kann als $S_k = T^k S_0$. Es gilt

$$T^\ell (T^k S_0) T^{-\ell} = T^{\ell+k} T^\ell S_0 = T^{k+2\ell} S_0,$$

für alle ℓ. Ausserdem gilt

$$T^\ell S_0 (T^k S_0)(T^\ell S_0)^{-1} = T^\ell S_0 T^{k-\ell} = T^{2\ell-k} S_0.$$

Daraus folgt, dass alle Konjugate von Spiegelungen wieder Spiegelungen sind. Ist n gerade, dann erhalten wir zwei Konjugationsklassen, nämlich

$$\{S_0, T^2S_0, \ldots, T^{n-2}S_0\}, \quad \{TS_0, T^3S_0, \ldots, T^{n-1}S_0\},$$

da die Exponenten sich immer um zwei unterscheiden. Ist nun n ungerade, dann sind alle Spiegelungen konjugiert.

(c) Wir wissen, dass $x \in Z(D_{2n})$ genau dann, wenn für alle $g \in D_{2n}$, $gxg^{-1} = x$. Das heisst nichts anderes, als dass die Konjugationsklasse von x aus nur einem Element besteht. Aus (b) folgern wir direkt, dass falls $x = T^k$ eine Rotation ist, dann muss $T^k = T^{-k}$ sein, was nur der Fall sein kann, falls $n = 2m$ gerade ist und $k = m$. Falls x eine Spiegelung S ist, dann muss $TS = S$, falls n ungerade, oder $T^2S = S$, falls n gerade. Im ersten Fall folgt $T = \mathrm{Id}$, ein Widerspruch. Im zweiten Fall folgt $T^2 = \mathrm{Id}$ und damit $n = 2$. Da die Rotation T und eine Spiegelung im Zentrum liegen folgt demnach für $n = 2$, dass $Z(D_{2\cdot 2}) = D_{2\cdot 2}$.

Daraus folgt

$$Z(D_{2n}) = \begin{cases} D_{2\cdot 2}, & n = 2 \\ \{1\}, & n \text{ ist ungerade} \\ \{1, T^{\frac{n}{2}}\}, & n \text{ ist gerade.} \end{cases}$$

(d) Es gilt nach (a), dass

$$[S_0, T^{-1}] = S_0 T^{-1} S_0^{-1} T = T^2,$$

und daraus folgt, dass $\langle T^2 \rangle < [D_{2n}, D_{2n}]$.

Wir berechnen weiterhin für beliebige $k, \ell \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
&[T^\ell S_0, T^{-k}] = T^\ell S_0 T^{-k} S_0^{-1} T^{-\ell+k} = T^\ell S_0 S_0 T^k T^{-\ell+k} = T^{2k} \\
&[T^{-k}, T^\ell S_0] = T^{-k+\ell} S_0 T^k S_0^{-1} T^{-\ell} = T^{-k+\ell} S_0 S_0 T^{-k} T^{-\ell} = T^{-2k} \\
&[T^\ell S_0, T^k S_0] = (T^\ell S_0)(T^k S_0)(S_0 T^{-\ell})(S_0 T^{-k}) = T^\ell S_0 T^{k-\ell} S_0 T^{-k} = T^{2(\ell-k)}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\langle T^2 \rangle = [D_{2n}, D_{2n}]$. Da n ungerade ist, gilt $\langle T^2 \rangle = \langle T \rangle = C_n$.

(e) Wir bestimmen zuerst die Untergruppen von D_{2p} für p prim. Da D_{2p} genau $2p$ Elemente hat und die Anzahl der Elemente jeder Untergruppe die Gruppenordnung teilt, wissen wir, dass alle Untergruppen entweder Ordnung $1, 2, p$ oder $2p$ haben. Eine Untergruppe mit einem Element besteht nur aus der Identität. Eine Untergruppe mit $2p$ Elementen ist die ganze Gruppe. Da für jede Spiegelung S gilt, dass $S^2 = \mathrm{Id}$ folgt, dass jede Spiegelung eine Untergruppe der Ordnung 2 erzeugt. Ausserdem erzeugt jede Rotation $T^k, 0 < k < p$, eine zyklische Untergruppe der Ordnung p und es gilt $C_p = \langle T^l \rangle = \langle T^k \rangle$ für alle $0 < l, k < p$. Wir zeigen nun, dass jede Untergruppe $G < D_{2p}$, die eine Rotation T und eine Spiegelung S oder zwei Spiegelungen enthält schon die ganze Gruppe ist. Im ersten Fall gilt nach obiger Überlegung, dass $C_p < G$. Ist $S = S_0$ sind wir fertig. Ansonsten bemerken wir, dass für jede andere Spiegelung $S = T^k S_0$ gilt, dass $T^{-k} S = S_0$ und damit gilt $G = D_{2p}$. Den zweiten Fall können wir auf den ersten zurückführen, da die Komposition zweier Spiegelungen eine Rotation ist ($T^k S_0 T^l S_0 = T^{k-l}$).

Wie für D_{2p} erhalten wir für $D_{2\cdot 4}$ die triviale Untergruppe, die ganze Gruppe, die zyklische Untergruppe $C_4 = \langle T \rangle$ der Ordnung 4 und 4 Untergruppen der Ordnung 2, die jeweils von den 4 Spiegelungen erzeugt werden. Ausserdem ist $\langle T^2 \rangle$ eine echte Untergruppe von C_4, da $T^4 = \mathrm{Id}$. Es ist eine Untergruppe der Ordnung zwei, ist aber verschieden von den Untergruppen, die von den Spiegelungen erzeugt werden. Ist $G < D_{2\cdot 4}$ eine beliebige Untergruppe, die die Rotation T oder T^3 und eine beliebige Spiegelung S enthält, dann gilt $G = D_{2\cdot 4}$. Nehmen wir also an G enthält die Rotation T^2 und eine Spiegelung S. Dann hat G vier Elemente, da $T^2 S \neq \mathrm{Id}$, welche alle Ordnung 2 haben. Es gilt

$$\langle T^2, S_0 \rangle = \langle T^2, T^2 S_0 \rangle \neq \langle T^2, T S_0 \rangle = \langle T^2, T^3 S_0 \rangle.$$

Nehmen wir nun an, dass G zwei Spiegelungen enthält, dann enthält G auch eine Rotation nach dem gleichen Argument wie vorher. Das heisst wir sind in einem der obigen Fälle. Wir haben nun alle 10 Untergruppen von $D_{2\cdot 4}$ bestimmt.