Lösung 9

Normale Untergruppen, Faktorgruppen, Gruppenwirkungen

1. Sei G eine Gruppe und $H, K < G$ Untergruppen von G. Zeigen Sie:
   (a) Das Produkt HK ist im Allgemeinen keine Untergruppe von G.
   (b) Angenommen H, K sind normal in G, dann ist HK eine normale Untergruppe von G.
   (c) Angenommen $H \lhd K$ und $K \lhd G$, also H ist eine normale Untergruppe von K und K ist eine normale Untergruppe von G, dann ist H im Allgemeinen keine normale Untergruppe von G.
   Hinweis: Betrachten Sie $D_{2\cdot 4}$.
   Nehmen wir zusätzlich an, dass H charakteristisch in K ist, dann ist H normal in G.

2. Sei S_n die symmetrische Gruppe auf n Elementen, $n \geqslant 2$.
   (a) Wir lassen S_n auf $\{1, \dots, n\}$ wirken und wir definieren eine Wirkung von S_n auf $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ durch $g \cdot (i, j) := (g(i), g(j))$ (dies nennt man auch die *diagonale Wirkung*). Zeigen Sie, dass diese Wirkung genau zwei Bahnen hat und bestimmen Sie diese.
   (b) Sei $\sigma \in S_n$. Wir bezeichnen durch $F(\sigma)$ die Anzahl der Punkte die von σ fixiert werden. Zeigen Sie, dass gilt:
   $$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} F(\sigma) = 1$$
   $$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} F(\sigma)^2 = 2$$
   Hinweis: Wir bemerken, dass $F(\sigma) = \sum_{x : \sigma(x) = x} 1$. Vertauschen Sie nun die Reihenfolge der Summation.

3. Sei G eine Gruppe und sei $H < G$ eine Untergruppe.
   (a) Angenommen H hat Index 2 in G. Zeigen Sie, dass H eine normale Untergruppe von G ist.
   (b) Angenommen H ist von endlichem Index in G. Zeigen Sie, dass ein in H enthaltener Normalteiler $N \lhd G$ von endlichem Index existiert.
   Hinweis: Finden Sie einen Homomorphismus $G \to S_n$, für $n := [G : H]$, dessen Kern in H enthalten ist.

4. Sei G eine Gruppe, die auf eine Menge T wirkt.

   (a) Für $H \subseteq G$ definieren wir die Menge der *H-Fixpunkte* als

   $$T^H := \{x \in T \,:\, \forall h \in H, h \cdot x = x\}.$$

   Finden Sie ein Beispiel in dem T^H nicht G-invariant ist, d.h. es existiert ein $g \in G$ und ein $x \in T^H$, so dass $g \cdot x \notin T^H$. Zeigen Sie, dass, falls $H \trianglelefteq G$, die Wirkung von G auf T eine Wirkung von G/H auf T^H induziert. Warum wirkt G/H im Allgemeinen nicht auf T?

   (b) Seien $t_1, t_2 \in T$ Elemente in der gleichen G-Bahn. Zeigen Sie, dass die Stabilisatoren $\mathrm{Stab}_G(t_1)$ und $\mathrm{Stab}_G(t_2)$ von t_1 und t_2 in G konjugiert sind.

5. Sei G eine Gruppe. Wie in der Vorlesung betrachten wir den Gruppenhomomorphismus $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$, der ein Element $g \in G$ auf den Automorphismus $(x \mapsto gxg^{-1})$ schickt, d.h. Konjugation mit g. Wir definieren die *Gruppe der inneren Automorphismen von G* als

   $$\mathrm{Inn}(G) := \mathrm{Im}(\rho).$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Inn}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$.

   Wir definieren die *Gruppe der äusseren Automorphismen von G* als die Faktorgruppe $\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$.

   (b) Bestimmen Sie $\mathrm{Out}(S_3)$.
   Hinweis: S_3 wird von zwei Permutationen erzeugt: $\sigma : (1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1)$ und $\tau_{12} : (1 \mapsto 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 3)$. Benutzen Sie Aufgabe 2(a) aus Serie 8.

   (c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Out}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \neq \{1\}$.
   Hinweis: Betrachten Sie die komplexe Konjugation.

   (d) Angenommen $\mathrm{Aut}(G)$ ist zyklisch. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe zyklisch ist.

   Lösung:

   (a) Ein allgemeines Element von $\mathrm{Inn}(G)$ kann geschrieben werden als $\rho(g)$ für $g \in G$. Es ist der innere Automorphismus, der $x \mapsto gxg^{-1}$ schickt. Sei nun $\sigma \in G$. Für alle $x \in G$ gilt,

   $$(\sigma\rho(g)\sigma^{-1})(x) = \sigma(g(\sigma^{-1}(x))g^{-1}) \overset{(*)}{=} \sigma(g)x\sigma(g^{-1}) \overset{(*)}{=} \sigma(g)x\sigma(g)^{-1}.$$

   In den Gleichheiten (*) haben wir verwendet, dass σ die Multiplikation respektiert. Da $x \in G$ beliebig war, folgt $\sigma\rho(g)\sigma^{-1} = \rho(\sigma(g)) \in \mathrm{Inn}(G)$. Daraus folgt, dass $\mathrm{Inn}(G)$ invariant unter Konjugation mit Elementen aus $\mathrm{Aut}(G)$ ist, was nichts anderes bedeutet, als dass $\mathrm{Inn}(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$.

(b) Die Abbildung $\rho : G \to \mathrm{Aut}(G)$ hat als Kern das Zentrum $Z(G)$. Für $G = S_3$ ist die Abbildung ρ injektiv, da $Z(S_3) = \{\mathrm{id}\}$ siehe Aufgabe 2(a) aus Serie 8. Es folgt, dass $\mathrm{Inn}(S_3) \cong S_3$ genau 6 Elemente hat.

Die Gruppe S_3 ist vom 3-Zykel $\sigma : (1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1)$ und der Transposition τ_{12} erzeugt (siehe Hinweis). Dies gilt, da die Untergruppe $\langle \sigma, \tau_{12} \rangle$ von S_3 die 4 Elemente $\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2, \tau_{12}$ enthält, und da die Kardinalität dieser Untergruppe $|S_3| = 6$ teilen muss (nach Lagranges Theorem), ist die einzige Möglichkeit, dass $\langle \tau, \sigma_{12} \rangle = S_3$.

Jeder Gruppenhomomorphismus ist eindeutig dadurch bestimmt, was er auf einem Erzeugendensystem tut. Dies bedeutet, dass jedes Element $\psi \in \mathrm{Aut}(S_3)$ durch $\psi(\sigma)$ und $\psi(\tau_{12})$ eindeutig bestimmt ist. Ein Gruppenisomorphismus erhält die Ordnung von Elementen in der Gruppe (siehe Aufgabe 3(b) aus Serie 8). Daraus folgt, dass $\psi(\sigma) \in \{\sigma, \sigma^2\}$, da das Bild Ordnung 3 haben muss, wohingegen $\psi(\tau_{12}) \in \{\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}\}$, da das Bild Ordnung 2 haben muss. Daraus folgt, dass wir höchstens $2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten haben, um ψ zu definieren, was bedeutet, dass $|\mathrm{Aut}(S_3)| \leqslant 6$. Daraus folgt, dass

$$6 = |S_3| = |\mathrm{Inn}(S_3)| \leqslant |\mathrm{Aut}(S_3)| \leqslant 6$$

was zeigt, dass $\mathrm{Inn}(S_3) = \mathrm{Aut}(S_3)$, und damit ist $\mathrm{Out}(S_3)$ die triviale Gruppe.

(c) Komplexe Konjugation jedes Eintrages einer Matrix definiert einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, für welchen wir $^-$ schreiben. In der Tat gilt für $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \det(\overline{A}) = \overline{\det}(A) \neq \overline{0} = 0 \text{ und} \\ \overline{AB} = \overline{A}\overline{B}, \end{aligned}$$

da die Determinante ein polynomieller Ausdruck in den Einträgen der Matrix ist und komplexe Konjugation respektiert sowohl Addition als auch Multiplikation. Es gilt $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$, und somit folgt, dass $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$.

Angenommen $\varphi \in \mathrm{Inn}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$. Dann schickt φ jede Matrix zu einer ihr ähnlichen Matrix, das heisst φ erhält die Eigenwerte (siehe Lineare Algebra). Dies ist nicht wahr, da zum Beispiel die Matrix $i \cdot \mathrm{Id}_n$ nur Eigenwerte i hat, wohingegen $\varphi(i \cdot \mathrm{Id}_n) = -i\mathrm{Id}_n$ nur Eigenwerte $-i$ hat, ein Widerspruch. Dies zeigt, dass $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \setminus \mathrm{Inn}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$, so dass $\mathrm{Out}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{Aut}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))/\mathrm{Inn}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ nicht trivial ist, was zu zeigen war.

(d) Wir zeigen zuerst den Hinweis. Sei $G = \langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe erzeugt von $g \in G$. Sei $H < G$ eine Untergruppe von G. Ist $G = \{e_G\}$, so ist G ist zyklisch, erzeugt von e_G. Andernfalls existiert $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ so dass $g^n \in H$. Ist $n < 0$, dann ist $(g^n)^{-1} = g^{-n} \in H$, da H abgeschlossen ist bezüglich der Inversen, woraus wir folgern, dass $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ existiert mit $g^m \in H$. Sei nun $m_0 = \min\{m \in \mathbb{Z}_{>0} : g^m = h\}$. Wir behaupten, dass

$$H = \langle g^{m_0} \rangle,$$

was zeigt, dass H zyklisch ist.

Die Inklusion "$\supseteq$"folgt, da H eine Untergruppe ist, die g^{m_0} enthält. Um "$\subseteq$" zu zeigen, nehmen wir $x \in H$ und schreiben $x = g^h$ mit $h = qm_0 + r$ für $0 \leqslant r < m_0$. Dann gilt

$$g^r = g^{h-qm_0} = x(g^{m_0})^{-q} \in H,$$

da $x \in H$ und $(g^{m_0})^{-q} \in H$, da wir bereits "$\supseteq$"gezeigt haben. Die Minimalität von m_0 impliziert, dass $r = 0$, und damit $x = g^h = g^{qm_0} \in \langle g^{m_0} \rangle$, was zu zeigen war.

Da $\mathrm{Aut}(G)$ zyklisch ist, wissen wir wegen des Hinweises, dass die Gruppe $\mathrm{Inn}(G)$ auch zyklisch ist. Der erste Isomorphiesatz angewendet auf ρ sagt uns, dass $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$, und damit ist $G/Z(G)$ auch zyklisch und wir können $\langle uZ(G) \rangle = G/Z(G)$ für ein $u \in G$ schreiben. Dies bedeutet, dass für jedes $g \in G$ ein $n_g \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $gZ(G) = (uZ(G))^{n_g} = u^{n_g}Z(G)$, d.h. $g = u^{n_g}y_g$ für ein $y_g \in Z(G)$. Seien nun $g, h \in G$. Wir schreiben $g = u^{n_g}y_g$, $h = u^{n_h}y_h$ mit $y_g, y_h \in Z(G)$, $n_g, n_h \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$gh = u^{n_g}y_g u^{n_h}y_h = u^{n_g}u^{n_h}y_h y_g = u^{n_h}u^{n_g}y_h y_g = u^{n_h}y_h u^{n_g}y_g = hg.$$

Dies zeigt, dass G abelsch ist.

6. Beschreiben Sie alle Gruppen der Ordnung $\leqslant 10$ bis auf Isomorphie.

Hinweis: Es gibt bis auf Isomorphie zwei nicht-abelsche Gruppen der Ordnung 8. Eine davon ist die *Quaternionengruppe* $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ mit der Verknüpfung $\cdot\colon Q_8 \times Q_8 \to Q_8$, die neben den üblichen Vorzeichenregeln die folgenden Relationen erfüllt: $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = i \cdot j \cdot k = -1$.

Lösung: Ist G eine Gruppe mit einem Element, dann ist G trivial. Ausserdem haben wir in der Vorlesung gesehen, dass falls G eine Gruppe mit Ordnung p ist, wobei p eine Primzahl ist, so ist $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dies deckt also alle Gruppen der Ordnungen $1, 2, 3, 5$ und 7 ab. Desweiteren wissen wir, dass alle Gruppen der Ordnung p^2, wobei p eine Primzahl ist, abelsch sind.

Sei nun G eine Gruppe der Ordnung 4. Wir wissen bereits, dass G abelsch ist. Hat G ein Element g der Ordnung 4, so ist $G = \langle g \rangle$ zyklisch und somit isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Angenommen G hat kein Element der Ordnung 4. Daraus folgt, dass jedes nicht-triviale Element in G eine Untergruppe der Ordnung zwei in G erzeugt. Es folgt, dass G isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.

Ein ähnliches Element liefert, dass eine Gruppe der Ordnung 9 isomorph zu $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist.

Sei nun G eine Gruppe der Ordnung 6. Angenommen es gibt ein Element der Ordnung 6. Dann ist G zyklisch und isomorph zu $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Angenommen G enthält ein Element g der Ordnung 3. Dann ist die von g erzeugte Untergruppe N normal in G, da sie Index 2 hat. Sei $x \in G \setminus N$ mit $G = N \sqcup xN$. Dann ist $x^2 \in N$, und falls $x^2 \neq e$, dann hat x Ordnung 6 und wir sind im ersten Fall. Das heisst wir nehmen nun an, dass g Ordnung 3 und x Ordnung 2 hat. Sei $H := \langle x \rangle$. Da $|HN| = 6$ und N normal ist, gilt $G = HN$. Betrachte nun die Wirkung von x auf N durch Konjugation. Ist $xgx^{-1} = g$, so ist G abelsch und isomorph zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ nach dem Chinesischen Restsatz. Andernfalls gilt $xgx^{-1} = g^2$ und damit ist $G = \langle g, x \mid g^3 = x^2 = 1, xgx^{-1} = g^2 \rangle$. Wir haben bereits gesehen, dass letzteres isomorph zu $D_{2\cdot 3} \cong S_3$ ist. Wir müssen noch zeigen, dass G ein Element der Ordnung 3 enthält. Angenommen G enthält nur Elemente der Ordnung 2. Aufgabe 4 (a) von Serie 8 impliziert, dass G abelsch ist, also isomorph zu einem Produkt von zyklischen Gruppen der Ordnung 2, also müsste G Ordnung 2^k für ein $k \in \mathbb{N}$ haben, was ein Widerspruch ist.

Der Fall der Ordnung 10 geht analog zur Ordnung 6 und wir erhalten, dass eine Gruppe der Ordnung 10 isomorph zu $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist, falls sie abelsch ist, und ansonsten isomorph zu $D_{2\cdot 5}$ ist.

Sei nun G eine Gruppe der Ordnung 8. Enthält G ein Element der Ordnung 8 so ist G zyklisch und isomorph zu $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Angenommen es gibt ein Element $g \in G$ der Ordnung 4. Dann ist die von g erzeugte Untergruppe N normal in G, da sie Index 2 hat. Wir finden ein Element $x \in G \setminus N$ mit $G = N \sqcup xN$. Es gilt, dass G von g und x erzeugt wird und wir betrachten wieder die Konjugationswirkung von x auf den Normalteiler $N = \langle g \rangle$. Da die Ordnung von xgx^{-1} gleich der Ordnung von g, also 4 ist, kann xgx^{-1} entweder g oder g^3 sein (g^2 hat Ordnung 2). Ist $xgx^{-1} = g$, so kommutieren g und x und es folgt, dass G abelsch ist. Falls x Ordnung 2 hat, so ist G isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Falls x Ordnung 4 hat, so ist $x^2 = g^2$ und damit ist xg ein Element der Ordnung 2 mit $xgN = xN$, und somit ist auch in diesem Fall G isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Falls x Ordnung 8 hat, so ist G zyklisch, aber diesen Fall haben wir schon besprochen. Ist $xgx^{-1} = g^3$ so genügt es die Ordnung von x zu betrachten. Wir haben drei Möglichkeiten. Falls x Ordnung 2 hat, so ist $G = \langle g, x \mid g^4 = x^2 = 1, xgx^{-1} = g^3 \rangle$, und somit isomorph zu $D_{2\cdot 4}$. Falls x Ordnung 4 hat, dann ist $x^2 = g^2$ (da x^2 in N liegt und Ordnung 2 hat), so ist $G = \langle g, x \mid g^4 = 1, g^2 = x^2, xgx^{-1} = g^3 \rangle \cong Q_8$. Dies lässt sich leicht einsehen, wenn man sich überlegt, dass Q_8 die Präsentierung $\langle i, j \mid i^4 = 1, i^2 = j^2, jij^{-1} = i^{-1} \rangle$ hat. Falls x Ordnung 8 hat, so ist G zyklisch. Angenommen alle Elemente von G haben Ordnung 2. Aufgabe 4 (a) von Serie 8 impliziert, dass G abelsch ist, also isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.