Prüfung Sommer 2021

- Bitte legen Sie Ihre ETH-Karte offen auf den Tisch.
- Diese Prüfung umfasst 4 Aufgaben und dauert 2 Stunden.
- Jede Aufgabe gibt 15 Punkte.
- Beantworten Sie die Aufgaben auf Ihrem eigenen Papier und schreiben Sie **die letzten 6 Ziffern Ihrer Legi-Nummer** auf alle abgegebenen Blätter.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege.
- Schreiben Sie leserlich mit einem nicht löschbaren blauen oder schwarzen Stift.
- Als Hilfsmittel werden nur eine Zusammenfassung der Vorlesung auf bis zu 20 Seiten (=10 Blätter A4) und ein Wörterbuch für Fremdsprachige erlaubt. Keine Taschenrechner und keine anderen Hilfsmittel sind zugelassen.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es (sowie eine allfällige Smartwatch) im Gepäck. Sie dürfen diese Geräte während der Prüfung nicht bei sich tragen.

Viel Erfolg!

1. Wir betrachten die folgende Basis von $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

und die lineare Transformation $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die bezüglich $\mathcal{B}$ durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

dargestellt wird.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\tilde{A}$ von F bezüglich der Standardbasis.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^2$, bezüglich welcher die lineare Transformation F durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.

---

2. Gegeben ist die Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ mit

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Dualbasis $\mathcal{B}^* = \{\beta^1, \beta^2, \beta^3\}$ von $\mathcal{B}$, indem Sie jedes β^i als Linearkombination der Koordinatenformen $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ bezüglich der Standardbasis angeben.

Zur Erinnerung erfüllen die Koordinatenformen bezüglich der Standardbasis

$$\varepsilon^i \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = v^i \ .$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}^*$ von $(\mathbb{R}^3)^*$ von der Linearform

$$\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ , \qquad \alpha(v) = v^1 - v^2 + v^3 \ ,$$

wobei v^1, v^2, v^3 die Standardkoordinaten von $v \in \mathbb{R}^3$ sind.

---

3. Sei V der Vektorraum aller symmetrischen reellen 2×2-Matrizen mit dem inneren Produkt definiert durch

$$g(A, B) = \mathrm{Spur}(AB) \text{ für } A, B \in V \ .$$

Gegeben ist die folgende Basis von V:

$$\mathcal{B} := \left\{ B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix G von g bezüglich $\mathcal{B}$.

(b) Bestimmen Sie die kovarianten Koordinaten von $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in V$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Falls Sie Teilaufgabe (a) nicht gelöst haben, nehmen Sie anstatt G

$$G' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

4. Seien U^i_j $i, j = 1, 2, 3$ die Komponenten eines $(1,1)$-Tensors U bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$. Welche der folgenden Werte sind invariant?

$$\begin{aligned} a &:= U^i_i, \\ b &:= U^i_j U^j_i, \\ c &:= U^i_j U^i_j. \end{aligned}$$

Beweisen Sie für jeden Wert die Invarianz oder geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel an (anhand einer Wahl von U und Basiswechsel), bei dem die Invarianz versagt.