Musterlösung der Prüfung Sommer 2021

- Bitte legen Sie Ihre ETH-Karte offen auf den Tisch.
- Diese Prüfung umfasst 4 Aufgaben und dauert 2 Stunden.
- Jede Aufgabe gibt 15 Punkte.
- Beantworten Sie die Aufgaben auf Ihrem eigenen Papier und schreiben Sie **die letzten 6 Ziffern Ihrer Legi-Nummer** auf alle abgegebenen Blätter.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege.
- Schreiben Sie leserlich mit einem nicht löschbaren blauen oder schwarzen Stift.
- Als Hilfsmittel werden nur eine Zusammenfassung der Vorlesung auf bis zu 20 Seiten (=10 Blätter A4) und ein Wörterbuch für Fremdsprachige erlaubt. Keine Taschenrechner und keine anderen Hilfsmittel sind zugelassen.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es (sowie eine allfällige Smartwatch) im Gepäck. Sie dürfen diese Geräte während der Prüfung nicht bei sich tragen.

Viel Erfolg!

1. Wir betrachten die folgende Basis von $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

und die lineare Transformation $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die bezüglich $\mathcal{B}$ durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

dargestellt wird.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\tilde{A}$ von F bezüglich der Standardbasis.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^2$, bezüglich welcher die lineare Transformation F durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.

Lösung:

(a) Sei L die Basiswechselmatrix von der Standardbasis nach $\mathcal{B}$. Dann ist

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und entsprechend finden wir

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lineare Transformationen sind $(1,1)$-Tensoren. Gemäss dem Transformationsgesetz für $(1,1)$-Tensoren gilt

$$\tilde{A} = L^{-1} A L = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Erste Lösung: Da A schon in obere Dreiecksform ist, wissen wir schon ihre Eigenwerte. Wir suchen also die Eigenvektoren zu den Eigenwerten 1 und 3. Der erste Vektor der Basis $\mathcal{B}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Wenn man das nicht sieht, kann mit wie bei der Eigenwert 3 Vektor vorgehen: in der Basis $\mathcal{B}$ ist es ein nicht-triviales Element des Kerns von

$$A - 3\mathrm{I} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das wäre zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

was im Standardbasis

$$L^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

entspricht. Das ergibt

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

als Basis, in welcher A in Diagonalform dargestellt wird.

Zweite Lösung: Wir suchen die Eigenwerte von

$$\begin{pmatrix}-3 & 8\\-3 & 7\end{pmatrix}.$$

Diese sind die Nullstellen von

$$\det\begin{pmatrix}-3-\lambda & 8\\-3 & 7-\lambda\end{pmatrix} = (-3-\lambda)(7-\lambda) + 8\cdot 3 = \lambda^2 - 4\lambda + 3\ ,$$

also 1 und 3. Jetzt bestimmen wir die Eigenvektoren, i.e. nichttriviale Elemente aus die Kerne von

$$\tilde{A} - \mathrm{I} = \begin{pmatrix}-4 & 8\\-3 & 6\end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} - 3\mathrm{I} = \begin{pmatrix}-6 & 8\\-3 & 4\end{pmatrix}.$$

Diese sind also zum Beispiel

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}.$$

---

2. Gegeben ist die Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ mit

$$b_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie die Dualbasis $\mathcal{B}^* = \{\beta^1, \beta^2, \beta^3\}$ von $\mathcal{B}$, indem Sie jedes β^i als Linearkombination der Koordinatenformen $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ bezüglich der Standardbasis angeben.

   Zur Erinnerung erfüllen die Koordinatenformen bezüglich der Standardbasis

$$\varepsilon^i\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{pmatrix} = v^i\ .$$

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}^*$ von $(\mathbb{R}^3)^*$ von der Linearform

$$\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ , \qquad \alpha(v) = v^1 - v^2 + v^3 \ ,$$

wobei v^1, v^2, v^3 die Standardkoordinaten von $v \in \mathbb{R}^3$ sind.

Lösung:

(a) Die Basiswechselmatrix von der Standardbasis nach $\mathcal{B}$ ist

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und hat die Inverse (die wir mit dem Gauss-Verfahren bestimmen können)

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Gemäss der Kontravarianz der Dualbasis finden wir

$$\begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \end{pmatrix} = L^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon^1 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^1 \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon^1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 \\ \varepsilon^1 - \varepsilon^3 \\ \varepsilon^1 - \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \end{pmatrix} .$$

(b) Gemäss Kovarianz sind die Komponenten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ von α in der Basis $\mathcal{B}^*$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

---

3. Sei V der Vektorraum aller symmetrischen reellen 2×2-Matrizen mit dem inneren Produkt definiert durch

$$g(A, B) = \mathrm{Spur}(AB) \text{ für } A, B \in V \ .$$

Gegeben ist die folgende Basis von V:

$$\mathcal{B} := \left\{ B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix G von g bezüglich $\mathcal{B}$.

(b) Bestimmen Sie die kovarianten Koordinaten von $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in V$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Falls Sie Teilaufgabe (a) nicht gelöst haben, nehmen Sie anstatt G

$$G' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Lösung:

(a) Wir berechnen die Einträge $(G)_{ij} = \mathrm{Spur}(B_i B_j)$, zum Beispiel

$$G_{23} = \mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Spur} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \ ,$$

und finden

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

(b) Die kontravarianten Koordinaten von A sind

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

weil $A = -B_1 - B_2 + B_3$. Daher sind die kovarianten Koordinaten

$$G \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

---

4. Seien U^i_j $i, j = 1, 2, 3$ die Komponenten eines $(1,1)$-Tensors U bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$. Welche der folgenden Werte sind invariant?

$$\begin{aligned} a &:= U^i_i, \\ b &:= U^i_j U^j_i, \\ c &:= U^i_j U^i_j. \end{aligned}$$

Beweisen Sie für jeden Wert die Invarianz oder geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel an (anhand einer Wahl von U und Basiswechsel), bei dem die Invarianz versagt.

Lösung:

Erste Lösung: Sei L eine beliebige Basiswechselmatrix und $\Lambda := L^{-1}$ ihre Inverse. Wir berechnen, wie sich a und b nach diesem Basiswechsel verhalten angesichts des Transformationsgesetz für $(1,1)$-Tensoren:

$$\begin{aligned}\tilde{U}^i_i &= L^i_j \Lambda^k_i U^j_k \\ &= \delta^k_j U^j_k \\ &= U^j_j, \\ \tilde{U}^i_j \tilde{U}^j_i &= L^i_k \Lambda^\ell_j U^k_\ell L^j_\ell \Lambda^k_i U^\ell_k \\ &= L^i_k \Lambda^k_i \Lambda^\ell_j L^j_\ell U^k_\ell U^\ell_k \\ &= U^k_\ell U^\ell_k.\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass a und b invariant sind. Andererseits erhalten wir ein Gegenbeispiel für die Invarianz von c mit z.B.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = X^T \; .$$

Dann ist $\tilde{U} = XUX^{-1}$ und $\tilde{U}^T = (X^{-1})^T U^T X^T = X^{-1} U^T X$. Obwohl

$$U^i_j U^i_j = \mathrm{Spur}(UU^T) = \mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 4 \; ,$$

gilt

$$\begin{aligned}\tilde{U}^i_j \tilde{U}^i_j = \mathrm{Spur}(\tilde{U}\tilde{U}^T) &= \mathrm{Spur}\left(X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X^{-1} X^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \right) \\ &= \mathrm{Spur}\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{13}{4} \neq 4.\end{aligned}$$

Daher ist c nicht invariant.

Zweite Lösung: Wenn wir U als Matrix interpretieren, gilt es

$$\begin{aligned} a &= \mathrm{Spur}(U), \\ b &= \mathrm{Spur}(U^2), \\ c &= \mathrm{Spur}(UU^T). \end{aligned}$$

Wir wollen herausfinden, wie sich diese Ausdrücke nach Konjugation verhalten. Die bekannte Invarianz von Spur unter Konjugation zeigt, dass

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Spur}(XUX^{-1}) = \mathrm{Spur}(U), \\
&\mathrm{Spur}((XUX^{-1})^2) = \mathrm{Spur}(XU^2X^{-1}) = \mathrm{Spur}(U^2)\ ,
\end{aligned}$$

daher sind a und b invariant. Andererseits erhalten wir das Gegenbeispiel für die Invarianz von c wie in der ersten Lösung.