Prof. Dr. Ana Cannas

Serie 1

Basen und Basiswechsel

1. Gegeben seien die folgenden zwei Basen von $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\pi \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

   a.) Sei $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \pi \end{bmatrix}$. Berechne den Koordinatenvektor $[v]_{\mathcal{B}}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ und den Koordinatenvektor $[v]_{\tilde{\mathcal{B}}}$ bezüglich der anderen Basis $\tilde{\mathcal{B}}$.

   b.) Sei $w \in \mathbb{R}^3$ mit $[w]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} -\pi + 1 \\ \pi^2 \\ \pi \end{pmatrix}$. Bestimme die Koordinaten von w bezüglich $\mathcal{B}$.

2. Sei

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

   a.) Zeige, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^5$ ist und berechne die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach der Standardbasis $\mathcal{E}$.

   b.) Sei $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Bestimme die Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{B}$.

3. Sei $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ die Standardbasis des Vektorraumes $V := \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 3$. Sei weiter $\alpha : V \to V$ die Funktion $\alpha(p(x)) := (x - 1)p'(x)$, wo $p'(x) := \frac{dp}{dx}(x)$, und $\tilde{\mathcal{B}} = \{1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3\}$.

   a.) Zeige, dass α linear ist. Beweise, dass $\tilde{\mathcal{B}}$ eine Basis von V ist, die aus Eigenvektoren von α besteht.

b.) Sei $\beta : V \to \mathbb{R}$ die lineare Abbildung $f(x) \mapsto f(1)$. Bestimme die Matrixdarstellung von β bezüglich $\mathcal{B}$ und bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$.

c.) Schreib die Transformationsmatrix $L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$ und ihre Inverse $L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$.

4. Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^3$ und die Basis

$$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Bestimme die Matrixdarstellung der Funktion $\psi(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{x}$ bezüglich $\mathcal{B}$.

5. Gegeben sind die reellen Matrizen

$$m_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad m_3 := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_4 := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \text{ und } B =: \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 100 & 1000 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2-Matrizen ist.

(b) Finde $[B]_{\mathcal{M}}$.

(c) Finde $[A]_{\mathcal{M}}$ und folgere daraus, dass $\{m_1, A, m_3, m_4\}$ keine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2-Matrizen ist.

6. Für jede folgende Untermenge vom Vektorraum $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$ der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 4$, bestimme ob sie ein Untervektorraum ist. Ist das der Fall, finde eine Basis dieses Untervektorraumes.

(a) $U_1 := \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : f(1) = 1\}$

(b) $U_2 := \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : f(1) = f(0) = f(-1) = 0\}$

(c) $U_3 := \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : f(0) + f'(0) = 2f(1)\}$

Abgabetermin: 01.03.2021.