

Serie 10

TRÄGHEITSTENSOREN

1. Gegeben seien folgende starre, homogene Körper mit Drehzentrum im Schwerpunkt:
 - (a) Ein dünner Stab der Länge l .
 - (b) Eine Scheibe mit Radius R .
 - (c) Ein Ball mit Radius R .
 - (d) Ein regulärer (rechtwinkliger) kreisförmiger Zylinder mit Radius R und Höhe h .
 - (e) Ein dreiachsiges Ellipsoid mit (rechtwinkligen) Halbachsen der Länge a, b, c .

Sei I jeweils der Trägheitstensor. Bestimme jeweils Kandidaten für Hauptträgheitsachsen (mittels geometrischen Überlegungen). Berechne die Koordinaten von I_{ij} bezüglich diesen Achsen und überprüfe, ob es sich tatsächlich um die Hauptträgheitsachsen handelt. Falls nicht: Bestimme die Hauptträgheitsachsen. Gib auch die Hauptträgheitsmomente und die Gleichung des Trägheitsellipsoids von K an.

Beachte, dass I stark vom gewählten Drehzentrum abhängt, welches für die Berechnung im Koordinatenursprung angenommen wird (hier entspricht dieser dem Schwerpunkt des jeweiligen Körpers).

2. Wähle jeweils Orthonormalbasen und bestimme den Trägheitstensor und das Trägheitsellipsoid folgender starrer Moleküle (d.h. wir betrachten diese als ein System von Partikeln mit sich nicht verändernden Abständen zueinander, wieder mit Drehzentrum im Schwerpunkt):
 - (a) n Atome der Masse m_i , $i = 1, \dots, n$, auf einer Geraden L mit relativen Abständen l_{ij} zwischen Atom i und j .
 - (b) Ein Molekül bestehend aus drei Atomen, welche auf den Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks ABC liegen, mit Basis $BC = a$ und Höhe h . Die Atome an der Stelle B und C haben Masse m_1 . Das Atom an der Stelle A hat Masse m_2 .
 - (c) Ein Molekül bestehend aus vier Atomen der gleichen Masse m , welche auf den Ecken eines regulären Tetraeders mit Seitenlänge a liegen.

Gib jeweils die Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente an.

3. Sei K ein homogener starrer Körper der Masse m , welcher die Form eines Parallelepipedes mit Seiten a, b, c hat. Es wird angenommen, dass K um eine seiner Diagonalen dreht (also durch den geometrischen Mittelpunkt) mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

- (a) Bestimme die Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente.
- (b) Bestimme die Gleichung des Trägheitsellipsoid.
- (c) Bestimme die kinetische Energie von K .
- (d) Bestimme das Drehmoment von K .

4. Betrachte den Trägheitstensor

$$I := \begin{pmatrix} 9 & 0 & -4 \\ 0 & 10 & 0 \\ -4 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechne das Trägheitsmoment von I bezüglich der Achse durch den Nullpunkt mit Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (b) Bestimme die Symmetrieachsen des zu I gehörenden Trägheitsellipsoids. *Hinweis:* Die Eigenwerte von I sind $\lambda_1 = 13$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = 5$.

Abgabetermin: 10.05.2021.