Serie 11

Spannungstensoren

1. Gegeben sei der Spannungstensor

$$\sigma := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Betrachte die Ebene, welche aufgespannt wird durch

$$v := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und bestimme die Spannungsvektoren ihrer beiden normalen Einheitsvektoren.

2. Sei $0 \neq s \in \mathbb{R}$. Finde eine Basis, bezüglich welcher der Spannungstensor

$$\sigma := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

die Form

$$\widetilde{\sigma} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \\ 0 & s & 0 \end{pmatrix}$$

hat. *Hinweis: Diagonalisiere die Matrix* $\begin{pmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{pmatrix}$

3. Sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^3$. Wieder sei ein Spannungstensor σ bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben

$$\sigma = [\sigma^{ij}] := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

   (a) Bestimme die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ von σ.

   (b) Bestimme die drei Hauptspannungsrichtungen $v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}, v_{\sigma_3}$ von σ.

   (c) Bestimme eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ bezüglich derer σ durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.

(d) Bestimme die ersten drei Spannungsinvarianten I_1, I_2 und I_3 (Skript Seite 96) des obigen Spannungstensors σ.

4. Wir bezeichnen einen Spannungstensor σ_S als Scherungsdeformation (shear deformation), wenn dessen Spur gleich 0 ist. Ausserdem bezeichnen wir einen Spannungstensor σ_P als hydrostatischen Druck, falls dessen Hauptspannungen alle gleich sind.

   (a) Zeige, dass ein allgemeiner Spannungstensor σ^{ij} immer als Summe einer Scherungsdeformation σ_S^{ij} und eines hydrostatischen Drucks σ_P^{ij} geschrieben werden kann.

   (b) Sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Ein Spannungstensor σ sei bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben

$$\sigma = [\sigma^{ij}] := \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Schreibe den obigen Spannungstensor σ als Summe einer Scherungsdeformation σ_S und eines hydrostatischen Drucks σ_P.

   (c*) Finde eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ bezüglich derer die bei (b) gefundenen Scherungsdeformation σ_S durch eine Matrix A beschrieben wird, die auf der Diagonale nur Nullen hat:

$$\exists x, y, z \in \mathbb{R} : A = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & 0 \end{bmatrix}.$$

   Hinweis: Die Matrix A muss die gleiche Eigenwerte besitzen wie σ_S. Dann können wir beide σ_S und A durch geeignete Wahl von Orthonormalbasen zur selben Diagonalmatrix diagonalisieren.

Abgabetermin: 17.05.2021.