Serie 12

Tensoren höherer Stufe

1. Sei T der $(0,3)$-Tensor von $\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$T(e_i, e_j, e_k) := \begin{cases} 0, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } j = k \\ i \cdot j \cdot k, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $1 \leqslant i, j, k \leqslant 3$. Berechnen Sie $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

2. Sei $V := \mathbb{R}^2$. Der $(3,0)$-Tensor T sei bezüglich der Standardbasis $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2\}$ von V^* definiert durch

$$T(\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon^k) := \begin{cases} i + i, & \text{falls } k = 1 \\ i - j, & \text{falls } k = 2. \end{cases}$$

   a) Berechnen Sie $T\big(\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\big)$.

   b) Bestimmen Sie die Koordinaten von T bezüglich der zur Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   dualen Basis $\mathcal{B}^*$.

3. Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit Orthonormalbasis $\mathcal{B}$. Gegeben sei ein homogenes Material, auf welches gewisse Kräfte einwirken. Diese führen zu internen Spannungen σ^{ij}, welche eine Verzerrung ε_{kl} des Materials bewirken. Wir gehen davon aus, dass diese rotationsfrei sind und nehmen an, dass das Material linear elastisch ist. Es gilt also das Hookesche Gesetzt (in Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}$):

$$\sigma^{ij} = E^{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Wobei E^{ijkl} der Elastizitätstensor des (homogenen) Materials ist.

Da der Spannungs- und Verzerrungstensor beide symmetrisch sind, i.e.

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ji} \qquad\qquad \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$$

besitzen σ^{ij} und ε_{kl} nur 6 unabh. Koordinaten. Es folgt, dass $E^{ijkl} = E^{jikl} = E^{jilk} = E^{ijlk}$. Entsprechend kommt häufig *Voigt*'s Notation zum Zuge:

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix}\sigma^{11} & \sigma^{22} & \sigma^{33} & \sigma^{23} & \sigma^{13} & \sigma^{12}\end{pmatrix}^\top \\ v &= \begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} & 2\varepsilon_{23} & 2\varepsilon_{13} & 2\varepsilon_{12}\end{pmatrix}^\top \\ C^{IJ} &= E^{ijkl}, \text{ wobei } I \to \{i,j\} \text{ resp. } J \to \{k,l\} \text{ nach folgenden Regeln:} \\ & 1 \to \{1,1\},\ 2 \to \{2,2\},\ 3 \to \{3,3\},\ 4 \to \{2,3\},\ 5 \to \{1,3\},\ 6 \to \{1,2\} \end{aligned}$$

E^{ijkl} wird dabei zu einer 6×6-Matrix C^{IJ} mit 36 Einträgen. Zeige folgendes:

$$u = Cv$$

Zusätzlich besitzt der Elastizitätstensor folgende Symmetrie:

$$E^{ijkl} = E^{klij}$$

Dies bedeutet, dass $C^{IJ} = C^{JI}$ eine symmetrische Matrix ist. Damit reduzieren sich die unabhängigen Einträge auf *nur noch* 21.

(a) Die Grössen u, v, C sind *keine* Tensoren. Warum nicht ? Dies ist übrigens der Grösse Nachteil von Voigts Notation.

(b) Falls das Material weitere Symmetrieeigenschaften besitzt reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Koordinaten weiter. Einer der bedeutendsten Fälle ist der der *Orthotropie*. Dabei besitzt das Material drei orthogonale Symmetrieebenen. D.h. bei einer Spiegelung an einer dieser Ebenen verändern sich die Materialeigenschaften (d.h. E^{ijkl}!) nicht. In diesem Falle wählen wir als Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ gerade die drei Normalenvektoren der Symmetrieebenen. $\tilde{E}^{ijkl}$ bleibt nun ja erhalten unter den drei Basistransformationen, welche durch die drei Ebenenspiegelungen $\{s_a\}_{a=1,2,3}$ gegeben sind. Zeige, dass die Transformationsmatrix in diesen drei Fällen jeweils gegeben ist durch:

$$L^i_j = \Lambda^i_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \neq a \\ -1 & \text{falls } i = j = a\ , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } a = 1,2,3$$

(c) Folgere aus Teil (b), dass $\tilde{E}^{ijkl} = 0$ gilt, falls einer der Indices (i,j,k,l) nur einmal auftritt. Bestimme ausserdem die grobe Form von C^{IJ} und gib an wieviele unabhängige Parameter noch übrigbleiben.

4.* Einige Grössen, welche wie Vektoren aussehen transformieren in Wahrheit kovariant, also wie Linearformen. Ein Beispiel ist der Gradient einer reellen, differenzierbarer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Der Gardient von f an der Stelle $a \in \mathbb{R}^n$, bezeichnet mit $\nabla f(a)$, ist definiert als der Vektor (resp. eben Kovektor) mit Komponenten

$\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$, wobei $x^1, \dots, x^n$ die Standardkoordinaten im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen. Sei $\tilde{\mathcal{B}}$ eine neue Basis und sei L die Matrix des Basiswechsels (und $\Lambda = L^{-1}$). Dann gilt bekanntlich:

$$\tilde{x}^i = \Lambda^i_j x^j$$

(a) Zeige dass der Gradient wie ein Kovektor transformiert, also:

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^j} = L^i_j \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{1}$$

Hinweis: Kettenregel!
Folgere, dass der Gradient ein Kovektor, also ein $(0,1)$-Tensor ist.

(b) Wir nehmen nun an, dass f zweifach differenzierbar ist. Die Hessematrix von f im Punkte $a \in \mathbb{R}^n$ (bezeichnet mit $Hf(a)$) ist in Koordinaten wie folgt definiert:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a)$$

Zeige, dass es sich bei $Hf(a)$ um einen Tensor handelt und bestimme dessen Transformationsverhalten, resp. dessen Typ.
Hinweis: Leite Gleichung (1) nach $\tilde{x}^k$ ab.
Bemerkung: Wenn die zweiten Ableitungen von f stetig sind, dann ist $Hf(a)$ symmetrisch!

(c) Wir fixieren $a \in \mathbb{R}^n$ und nehmen nun an, dass f glatt ist. Für $n \geqslant 0$ definieren wir:

$$H_{i_1 i_2 \dots i_n} := \frac{\partial^n f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \dots \partial x^{i_n}}(a)$$

Zeige, dass $H_{i_1 i_2 \dots i_n}$ die Koordinaten eines symmetrischen $(0,n)$-Tensors sind.
Hinweis: Induktion.
Bemerkung: Diese Tensoren treten bei der Taylor-Reihe von f auf.

Abgabetermin: 24.05.2021.