Serie 13

Repetition

1. Gegeben ist die Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ mit

$$b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \ b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Weiter ist der Vektor $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ gegeben, sowie die Linearabbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die $b_1 \mapsto b_2 + b_3$ bzw. $b_2 \mapsto b_1 + b_3$ bzw. $b_3 \mapsto b_1 + b_2$ schickt.

(a) Bestimme die Matrixdarstellung von φ bezüglich $\mathcal{B}$.

(b) Bestimme eine Basis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer die Abbildung φ diagonale Matrixdarstellung besitzt.

(c) Berechne $\varphi(v)$.

(d) Berechne die Dualbasis $\mathcal{B}^*$ von $\mathcal{B}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}^*$ von $(\mathbb{R}^3)^*$.

2. Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Reflexion an der Linie ℓ gegeben durch

$$x - y + z = 2x - 3y = 0.$$

Finde die Matrixdarstellung $[\psi]_\mathcal{E}$ von ψ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

3. (a) Seien $A = (A^i_j)$ und $B = (B^i_j)$ zwei $n \times n$ Matrizen, wobei der obenstehende Index als Zeilenindex, der unterstehende als Spaltenindex gilt. Beweise die Gleichung

$$A^i_j B^j_i = \mathrm{Spur}(AB).$$

(b) Definiert ist weiter das Kronecker-Delta

$$\delta^{ij} = \delta^i_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ordne jeden Term auf der linken Seite dem gleichwertigem Term auf der rechten Seite zu:

v.	$A^i_k \delta^k_i \delta^\ell_j B^j_\ell$	e.	$\mathrm{Spur}((A^T)B)$
vi.	$A^i_k \delta^j_\ell \delta^\ell_j B^k_i$	f.	$n \cdot \mathrm{Spur}(AB)$
vii.	$A^i_j \delta^{j\ell} \delta_{\ell k} B^k_i$	g.	$\mathrm{Spur}(A) \cdot \mathrm{Spur}(B)$
viii.	$A^k_\ell \delta^{i\ell} \delta_{jk} B^j_i$	h.	$\mathrm{Spur}(AB)$

4. Gegeben sind die Vektoren

$$b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ und } b_2 := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

von $\mathbb{R}^2$ und die Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ von $\mathbb{R}^2$.

(a) Berechne die Dualbasis $\mathcal{B}^* = \{\beta^1, \beta^2\}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}^*$.

(b) Bestimme die reziproke Basis $\mathcal{B}^g$ von $\mathcal{B}$ bezüglich des Standardskalarprodukts $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

5. Sei $a \in \mathbb{R}$. Gegeben sind die 2×2 Matrizen

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 0 \end{bmatrix}, \ M_3 = \begin{bmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ M_4 = \begin{bmatrix} 1-a & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die vier obigen Matrizen eine Basis $\mathcal{B} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bilden, wenn und nur wenn $a \notin \{1, 2\}$.

(b) Nehmen wir an, dass $a = 0$. Sei g das innere Produkt, für welches $\mathcal{B}$ orthonormal ist. Bestimme die Matrixdarstellung von g bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

6. Sei V ein Vektorraum der Dimension n mit den zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ und sei $L = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$. Sei weiter wie üblich $\Lambda = L^{-1}_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = L^{-1}$.

(a) Beschreibe in der Einsteinschen Summenkonvention das Transformationsverhalten eines Tensors.

i. R vom Typ $(0, 1)$ mit Koordinaten R_i bez. $\mathcal{B}$ und $\tilde{R}_i$ bez. $\tilde{\mathcal{B}}$.

ii. S vom Typ $(2, 0)$ mit Koordinaten S^{ij} bez. $\mathcal{B}$ und $\tilde{S}^{ij}$ bez. $\tilde{\mathcal{B}}$.

iii. T vom Typ $(1, 3)$ mit Koordinaten T^h_{ijk} bez. $\mathcal{B}$ und $\tilde{T}^h_{ijk}$ bez. $\tilde{\mathcal{B}}$.

(b) Schreibe die Komponenten der Tensoren

i. $R \otimes S \otimes R$

ii. $R \otimes T$

bezüglich $\mathcal{B}$ wobei R, S und T wie im Teil (a) sind. Von welchem Typen sind diese Tensoren ?

(c) Welche der folgenden indizierten Grössen U, X, Y, Z besitzen das Transformationsverhalten eines Tensors in der Einsteinschen Summenkonvention? Wenn die Antwort ja ist, bestimme den Typ des Tensors. Begründe alle deine Antworte.

i. $\tilde{U}_{ij} = L^k_i L^\ell_j U_{k\ell}$

ii. $\tilde{X}^{ijk} = L^i_q L^j_r \Lambda^k_s X^{qrs}$

iii. $\Lambda^k_i \tilde{Y}^{ij} = \Lambda^j_r Y^{kr}$

iv. $\tilde{Z}^i_j = \Lambda^i_k L^\ell_j L^p_q \Lambda^q_\ell Z^k_p$

7. Gegeben sind die zwei Basen von $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$
$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und das innere Produkt g auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$, für welches $\mathcal{C}$ orthonormal ist.

(a) Bestimme die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{CB}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$.

(b) Bestimme die Matrixdarstellung von g bezüglich $\mathcal{B}$.

(c) Bestimme die reziproke Basis $\mathcal{B}^g$ von $\mathcal{B}$ bezüglich g.

(d) Bestimme die kovarianten und kontravarianten Koordinaten von A bezüglich $\mathcal{B}$.

8. (a) Sei x ein Vektor und A die durch $A_{ij} = i - j$ definierte Matrix. Zeige, dass $A_{ij}x^i x^j = 0$.

(b) Sei A eine 3×3-Matrix mit (i,j)-Element A^i_j. Zeige, dass gilt

$$\det(A) = \varepsilon_{ijk} A^i_1 A^j_2 A^k_3,$$

wobei ε_{ijk} das Levi-Cevita Symbol ist.

(c) Sei S_{ijkl} ein kovarianter Tensor mit folgenden Symmetrien:

i. $S_{ijkl} = -S_{jikl}$,

ii. $S_{ijkl} = -S_{ijlk}$,

iii. $S_{ijkl} + S_{iklj} + S_{iljk} = 0$.

Zeige, dass dann $S_{ijkl} = S_{klij}$.

9. Nehme an, dass wir für jede Basis $\mathcal{B}$ von einem n-dimensionalen Vektorraum, n^2 Zahlen $(T^{ij})^n_{i,j=1}$ haben, und würden gern herausfinden, ob diese Komponenten eines $(2,0)$-Tensors sind. Wir finden, dass für jede Wahl von einem $(0,1)$-Tensor mit Komponenten u_i bezüglich $\mathcal{B}$ die Zahlen

$$v^i := T^{ij} u_j$$

die Komponenten eines $(1,0)$-Tensors sind. Zeige, dass dann die T^{ij} tatsächlich die Komponenten von einem $(2,0)$-Tensor sind.

10. Wir bezeichnen einen Spannungstensor σ_S als Scherungsdeformation (shear deformation), wenn dessen Spur gleich 0 ist. Ausserdem bezeichnen wir einen Spannungstensor σ_P als hydrostatischen Druck, falls dessen Hauptspannungen alle gleich sind.

    Weiter sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^3$. Ein Spannungstensor σ sei bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben

$$A = [\sigma]_{\mathcal{E}} = [\sigma^{ij}] := \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

    (a) Bestimme die ersten drei Spannungsinvarianten I_1, I_2 und I_3 des obigen Spannungstensors σ.

    (b) Bestimme die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ von σ.

    (c) Bestimme eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer σ durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.

    (d) Schreibe den obigen Spannungstensor σ als Summe einer Scherungsdeformation σ_S und eines hydrostatischen Drucks σ_P.

    (e) Finde eine Orthonormalbasis $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer die Matrixdarstellung von σ_S auf der Diagonale nur Nullen hat.