Serie 2

Einsteinsche Summenkonvention und Lineare Transformationen

1. Seien $A = (A^i_j) \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ und $B = (B^i_j) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Matrizen, wo der obere Index die Reihe und der untere die Spalte bezeichnet. Seien weiter $x = (x^i) \in \mathbb{R}^\ell$ und $y = (y^i) \in \mathbb{R}^n$ Spaltenvektoren. Schreibe die Koordinaten der folgenden Ausdrücke mittels der Einsteinschen Summenkonvention:

   (a) $x^T y$
   (b) AB
   (c) By
   (d) $y^T B^T$
   (e) $A^T x$
   (f) $xy^T B^T$

2. Gegeben sind zwei $n \times n$ Matrizen $A = (A^i_j)$ und $B = (B^i_j)$. Sei $I = (\delta^i_j)$ die $n \times n$ Einheitsmatrix. Weiter sei $x = (x^i)$ ein n-dimensionellen Spaltenvektoren. Schreibe die folgenden Ausdrücke explizit aus.

   (a) $x^j A^i_k B^k_j$
   (b) $\delta^j_i \delta^k_j A^i_k$
   (c) $\delta^j_i A^i_k B^k_\ell x^\ell$
   (d) $\delta^i_i \delta^k_j \delta^j_k$

3. Sei $u = (u_i) \in \mathbb{R}^n$. Definieren wir die Matrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = u_i - u_j$. Zeige, dass $A_{ij} x^i x^j = 0$ gilt.

4. Welche der folgenden Ausdrücke machen Sinn? Warum?

   (a) $x^i y_i = t^i$
   (b) $A_{nm} E^{mn} = U$
   (c) $A^{ep} F_{e\ell} = T^p_{e\ell}$
   (d) $P^{fe} F_f E^r = S^e H^r$
   (e) $E^i_{ch} H_{oe} R^{ch} N^{en} = U^{ni} T_o$

5. Gegeben ist die Gerade $\ell : x+y = y-2z = 0$ im Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Sei $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Projektion an ℓ. Finde die Matrixdarstellung von π bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Hinweis: Zeige zuerst, dass die Gerad ℓ die Menge aller Vielfachen von $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist.

6. Gegeben ist die Basis $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, mit

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \; x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \; x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die $x_1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $x_2 \mapsto \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $x_3 \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ schickt. Weiter betrachten wir die Basis $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ von $\mathbb{R}^2$.

(a) Berechne die Matrixdarstellung von ψ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

(b) Berechne die Matrixdarstellung von ψ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$.

7. Sei $\Theta : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ die lineare Transformation des Vektorraumes der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 3$, die definiert ist durch

$$\Theta(f(x)) = (3x-1)f(x) - (x^2-2)f'(x).$$

Bestimme die Matrixdarstellung von Θ bezüglich der Standarbasis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ sowie bezüglich der Basis $\tilde{\mathcal{B}} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$.

Abgabetermin: 08.03.2021.