Serie 3

Diagonalisierbarkeit

1. Gegeben ist die Basis $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, mit

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \ x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ die einzige lineare Abbildung, die $x_1 \mapsto x_2$ bzw. $x_2 \mapsto x_1$ bzw. $x_3 \mapsto x_3$ schickt.

   (a) Bestimme die Matrixdarstellung von φ bezüglich $\mathcal{B}$.

   (b) Bestimme die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$.

   (c) Ist die bei (b) gefundene Matrix diagonalisierbar?

2. Gegeben sind die zwei Basen von $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

und

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

sowie die zwei lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} &\to \mathbb{R}^{2\times 2} & \qquad \tilde{\varphi} : \mathbb{R}^{2\times 2} &\to \mathbb{R}^{2\times 2} \\ A &\mapsto A - A^T & A &\mapsto A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A. \end{aligned}$$

   (a) Bestimme die Matrixdarstellungen von φ bezüglich $\mathcal{B}$ und von $\tilde{\varphi}$ bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$.

   (b) Berechne die Wechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$.

   (c) Finde die Matrixdarstellungen von φ bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$ und von $\tilde{\varphi}$ bezüglich $\mathcal{B}$.

   (d) Finde Eigenwerte und Eigenvektoren von φ.

   (e) Ist φ diagonalisierbar? Wenn ja, bestimme eine Eigenbasis $\mathcal{E}_\varphi$ und die Matrixdarstellung von φ bezüglich $\mathcal{E}_\varphi$.

(f) Finde die Eigenwerte von $\tilde{\varphi}$. Ist $\tilde{\varphi}$ diagonalisierbar?

3. Gegeben sind die Ebene $\pi : x - y + z = 0$ und die Gerade $\ell : x = y = z$ im Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Ebenenspiegelung an π und $\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Achsenspiegelung an ℓ.

   (a) Finde eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von α besteht und bestimme die Matrixdarstellung $[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

   (b) Finde die Matrixdarstellung von α bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

   (c) Finde die Matrixdarstellung von β bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

   (d*) Sei $\pi' = \beta(\pi)$ die an der Gerade ℓ reflektierte Ebene π. Bestimme eine Gleichung, die π' definiert.

4. Gegeben ist eine Nummer $a \in \mathbb{R}$ und die Vektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Zeige, dass $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, wenn und nur wenn $a \notin \{-1, 0\}$.

   (b) Nehmen wir an, dass $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Transformation, die $v_1 \mapsto v_2$ bzw. $v_2 \mapsto v_1$ bzw. $v_3 \mapsto e_1 + (a+2)e_2 + e_3$ schickt. Für welche Werte von a ist ψ diagonalisierbar?

Abgabetermin: 15.03.2021.