Serie 6

Bilinearformen

1. Sei $\mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R}) := \{\text{alle Bilinearformen } V \times V \to \mathbb{R}\}$. Zeige, dass $\mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ ein Vektorraum ist.

   Hinweis: Zeige, dass $\mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ ein Untervektorraum vom Vektorraum aller Abbildungen $f : V \times V \to \mathbb{R}$ ist.

2. Gegeben ist einen n-dimensionalen Vektorraum V, eine Basis $\mathcal{B}$ von V und zwei Linearformen $\eta, \theta \in V^*$ mit Koordinatenvektoren
$$[\eta]_{\mathcal{B}^*} = [\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \eta_n] \text{ und } [\theta]_{\mathcal{B}^*} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \theta_n].$$
   Sei $B = \eta \otimes \theta : V \times V \to \mathbb{R}$. Bestimme die Matrixdarstellung von B bezüglich $\mathcal{B}$ und zeige, dass diese Matrix Rang $\leqslant 1$ hat.

3. Gegeben ist der Vektorraum $V := \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 3$, seine Standardbasis $\mathcal{E}$ und die Basis $\mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$. Wir betrachten die Abbildung:
$$\begin{aligned} B : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (f(x), g(x)) &\mapsto \int_{-2}^{0} f'(x) g(x+1) dx \end{aligned}$$
   (a) Zeige, dass B eine bilineare Abbildung auf $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ ist.
   (b) Bestimme die Matrixdarstellung von B bezüglich der Basis $\mathcal{E}$.
   (c) Bestimme die Matrixdarstellung von B bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.
   (d) Berechne $B((x-1)^3, x^2 - 2x)$.
   (e) Gibt es Linearformen $\eta, \theta \in V^*$, die die Gleichung $B = \eta \otimes \theta$ erfüllen?

4. Gegeben sind die zwei Basen von $\mathbb{R}^{2\times 2}$
$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$
   und
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$
   Sei weiter $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ die Abbildung, die $(A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(A^T B)$ schickt. Berechne die Matrixdarstellung von T bezüglich $\mathcal{E}$ und die Matrixdarstellung von T bezüglich $\mathcal{B}$.

Abgabetermin: 12.04.2019.