D-MATH — Multilineare Algebra — FS21
Prof. Dr. Ana Cannas

Serie 7

Multilinearformen, innere Produkte

1. Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ das Spatprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(u, v, w) = u \cdot (v \times w).$$

   Zeige, dass $\varphi(u, v, w) = \det([u\ v\ w])$ gilt und dass φ eine Trilinearform ist.

2. Welche der folgende Bilinearformen sind innere Produkte?

   (a) Die Bilinearform $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die $(v_1, v_2) \mapsto \det([v_1\ v_2])$ schickt.

   (b) Die Bilinearform $B : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \times \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}$ definiert durch $B(p(x), q(x)) = \int_1^2 p'(x)q'(x)dx$.

   (c) Die Bilinearform $C : \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \times \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3} \to \mathbb{R}$ definiert durch $C(p(x), q(x)) = \int_1^2 p(x)q(x+1)dx$.

   (d) Die Bilinearform $T : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, die durch $T(A, B) = \mathrm{Spur}(A^T B)$ definiert ist.

3. Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ der Vektorraum der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 2$. Gegeben ist die Basis $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ und die Abbildung $g : V \times V \to \mathbb{R}$, die durch

$$g(p(x), q(x)) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p'(0)q(1) + p(1)q'(0)$$

   definiert ist. Weiter ist die Basis $\mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2\}$ von V gegeben und die Linearform $\theta \in V^*$, die durch $\theta(r(x)) = r'(1)$ definiert ist.

   (a) Zeige, dass g ein inneres Produkt auf V ist.

   (b) Wende das Gram-Schmidt-Verfahren auf $\mathcal{E}$ bezüglich g an, um eine orthonormale Basis $\tilde{\mathcal{E}}$ bezüglich g zu finden.

   (c) Bestimme zudem die Transformationsmatrizen $L_{\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{E}}$ von $\mathcal{E}$ nach $\tilde{\mathcal{E}}$ und $L_{\tilde{\mathcal{E}}\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{E}}$.

   (d) Finde die Komponenten von g bezüglich der Basis $\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^*$ von $V^* \otimes V^*$.

   (e) Finde die Komponenten der Trilinearform $g \otimes \theta$ auf V bezüglich der Basis $\mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^* \otimes \mathcal{B}^*$.

Abgabetermin: 19.04.2019.