Serie 8

Orthonormale Basen

1. Sei V ein Vektorraum von der Dimension n. Gegeben sind zwei Basen $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_n\}$ von V und ein inneres Produkt g auf V, für welches die Basis $\mathcal{B}$ orthonormal ist.

   (a) Zeige, dass die Transformationsmatrix $L = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = (L^i_j)$ gegeben ist durch
   $$L^i_j = g(\tilde{b}_j, b_i).$$

   (b) Nehmen wir an, dass die Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ auch orthonormal bezüglich g ist. Zeige, dass die Gleichungen $L^T L = \mathrm{Id} = LL^T$ gelten. Das bedeutet, dass L eine *orthogonale* Matrix ist. [*Hinweis:* Es hat $\delta_{i,j} = g(\tilde{b}_j, \tilde{b}_i)$. Schreibe den zweiten Vektor als Linearkombination von $b_1, \ldots, b_n$.]

2. Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\geqslant 3}$ der Vektorraum der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 3$. Gegeben sind die Basen
   $$\mathcal{E} = \{1, x, x^2, x^3\},\ \mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\},\ \mathcal{F} = \{x^3, x^2, x, 1\}$$
   und das innere Produkt g auf V für welches die Basis $\mathcal{B}$ orthonormal ist.

   (a) Finde die Matrixdarstellung von g bezüglich der Basis $\mathcal{E}$.

   (b) Wende das Gram-Schmidt Verfahren auf der Basis $\mathcal{F}$ an, um eine (weitere) orthonormale Basis $\mathcal{C}$ bezüglich g und finden.

   (c) Bestimme die Trasformationsmatrix $L = L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$. Überprüfe, dass L orthogonal ist. [*Hinweis:* Du kannst die folgende Tatsache verwenden, ohne sie zu beweisen: Eine Matrix ist orthogonal, wenn und nur wenn ihre Spalten bezüglich des Standardprodukts eine orthonormale Basis bilden.]

3. Sei V der Vektorraum der Polynome $p(x)$ vom Grad $\leqslant 3$ mit $p(0) = 0$.

   (a) Folgende Abbildung ist ein Skalarprodukt auf V:
   $$g(p, q) := \int_0^1 p'(x)q'(x)dx$$
   Warum?

   (b) $\mathcal{B} = \{x, x^2, x^3\}$ ist eine Basis von V. Warum? Ist es eine Orthonormalbasis? Begründe deine Antwort.

(c) Bestimme g_{ij} (bezüglich $\mathcal{B}$) und bestimme auch $\mathcal{B}^g$.

(d) Sei $v(x) = x^3 - x$. Bestimme die ko- und kontravarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{B}$.

(e) Sei $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. Überprüfe, dass folgendes gilt:

$$v^i = v_j g^{ij}$$

(f) Schreibe $v(x) = v^{||}(x) + v^{\perp}(x)$, wobei $v^{||}$ parallel zu x^2 steht und $v^{\perp}$ orthogonal auf x^2 steht.
Tipp: *Zeige, dass $v^{\perp}(x) = v(x) - g(x^2, v(x))x^2$ orthogonal auf x^2 steht.*

(g) Bestimme eine Orthonormalbasis von V bezüglich g. Was ist deren reziproke Basis (bezüglich g)?

4. Gegeben sind die drei Vektoren

$$b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; b_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \; b_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

Sei g das innere Produkt, bezüglich dessen $\mathcal{B}$ orthonormal ist.

(b) Bestimme die Matrixdarstellung von g bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^3$.

(c) Bestimme die reziproke Basis $\mathcal{B}^g$ von $\mathcal{B}$ bezüglich g.

(d) Bestimme die reziproke Basis $\mathcal{E}^g$ der Standardbasis $\mathcal{E}$ bezüglich g.

(e) Gibt es eine Basis $\mathcal{C}^g = \{c_1, c_2, c_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, dessen reziproke Basis bezüglich g durch $\mathcal{C} = \{c_3, c_2, c_1\}$ gegeben ist?

Abgabetermin: 26.04.2021.