Serie 9

Reziproke Basen und kovariante Koordinaten

1. Gegeben sind die Basen

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \text{ und } \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

und das innere Produkt g auf V, für welches $\mathcal{B}$ orthonormal ist (siehe auch Serie 8, Aufgabe 4). Gegeben ist weiter der Vektor

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimme die kontravarianten und kovarianten Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$.

(b) Bestimme die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{BC}}$ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$ und berechne die reziproke Basis $\mathcal{C}^g$.

(c) Berechne die kovarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{C}$.

2. Gegeben sind die vier 2×2 Matrizen

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ B_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die Formel $g(A, B) = \mathrm{Spur}(A^T B)$, ein inneres produkt auf $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert.

(b) Zeige, dass die Standardbasis $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ orthonormal bezüglich g ist und dass die Formel

$$g\left(\begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b^{11} & b^{12} \\ b^{21} & b^{22} \end{bmatrix} \right) = a^{11}b^{11} + a^{12}b^{12} + a^{21}b^{21} + a^{22}b^{22}$$

gilt. [*Hinweis:* Serie 6, Aufgabe 4]

(c) Zeige, dass

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\} \text{ und } \tilde{\mathcal{B}} = \{2B_1 - B_2, B_1 - B_4, B_3 + B_4, B_2 + B_3\}$$

Basen von V sind.

(d) Bestimme die reziproke Basis $\mathcal{B}^g$.

(e) Bestimme die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$ von $\tilde{\mathcal{B}}$ nach $\mathcal{B}$

(f) Bestimme die reziproke Basis $\tilde{\mathcal{B}}^g$.

3. Gegeben sind der Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 2$ und seine Basen $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ und $\mathcal{B} = \{1 + x + x^2, 3 + x, 3x^2\}$.

   Sei g das innere Produkt auf V dessen Darstellungsmatrix bezüglich $\mathcal{E}$ gegeben ist durch

$$G = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & 0 & \frac{8}{9} \\ 0 & 6 & 0 \\ \frac{8}{9} & 0 & \frac{28}{9} \end{bmatrix}.$$

   (a) Wende das Gram-Schmidt Verfahren auf $\mathcal{B}$ an, um eine orthonormale Basis $\mathcal{C}$ von V bezüglich g zu finden. Finde dazu die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$.

   (b) Bestimme die reziproke Basen $\mathcal{C}^g$ und $\mathcal{B}^g$.

   (c) Bestimme die kovarianten und kontravarianten Koordinaten des Polynoms $f = 3 + x + 3x^2$ bezüglich $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{B}$.

4. Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit der Basis $\mathcal{B} = \{b_1,\ b_2,\ b_3\}$. Sei g das Standardskalarprodukt und sei $\mathcal{B}^g = \{b^1,\ b^2,\ b^3\}$ die reziproke Basis von $\mathcal{B}$ bezüglich g.

   (a) In diesem Spezialfall (Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$) lässt sich die reziproke Basis einfach(er) bestimmen. Zeige, dass in diesem Fall gilt:

$$b^1 = \frac{b_2 \times b_3}{g(b_1, b_2 \times b_3)} \qquad b^2 = \frac{b_3 \times b_1}{g(b_2, b_3 \times b_1)} \qquad b^3 = \frac{b_1 \times b_2}{g(b_3, b_1 \times b_2)}$$

   Bemerkung: *Der Nenner $g(b_1, b_2 \times b_3)$ ist das Spatprodukt $T(b_1, b_2, b_3)$ aus Serie 7. Dieses ändert sich nicht bei zyklischem Vertauschen der Argumente. Der Nenner ist also in allen drei Fällen dieselbe Zahl. Diese entspricht (bis auf ein Vorzeichen) dem Volumen des von b_1, b_2 und b_3 aufgespannten Parallelepipeds.*

   (b) Welche Werte kann $g(b_1, b_2 \times b_3)$ annehmen ?

Abgabetermin: 03.05.2021.