Musterlösung der Serie 1

Basen und Basiswechsel

1. Gegeben seien die folgenden zwei Basen von $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\pi \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

a.) Sei $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \pi \end{bmatrix}$. Berechne den Koordinatenvektor $[v]_{\mathcal{B}}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ und den Koordinatenvektor $[v]_{\tilde{\mathcal{B}}}$ bezüglich der anderen Basis $\tilde{\mathcal{B}}$.

b.) Sei $w \in \mathbb{R}^3$ mit $[w]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} -\pi + 1 \\ \pi^2 \\ \pi \end{pmatrix}$. Bestimme die Koordinaten von w bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung:

a.) Wir berechnen zuerst die Transformationsmatrix L bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ und der Basis $\mathcal{B}$. Es gilt per Definition

$$(b_1\ b_2\ b_3) = (e_1\ e_2\ e_3)L$$

und daher ist $L = (b_1\ b_2\ b_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Damit gilt $[v]_{\mathcal{B}} = L^{-1}[v]_{\mathcal{E}} = L^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 - \pi \\ \pi \end{pmatrix}$.

Die Transformationsmatrix $L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$ erfüllt die Gleichung

$$\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}.$$

Daher ist $L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \mathcal{B}^{-1}\tilde{\mathcal{B}}$, wobei $\mathcal{B}^{-1}$ die Inverse der Matrix $(b_1\ b_2\ b_3)$ bezeichnet. Es gilt somit $\mathcal{B}^{-1} = L^{-1}$ mit obigem L. Also gilt

$$L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \pi & 1 & -\pi \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi & -1 & 1 + \pi \\ \pi - 1 & 1 & -\pi \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nun berechnen wir

$$\Lambda = L^{-1}_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \pi & 1+\pi & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Schlussendlich berechnen wir

$$[v]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \Lambda[v]_{\mathcal{B}} = L^{-1}_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \pi & 1+\pi & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1-\pi \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 1-\pi^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b.) Es ist $[w]_{\mathcal{B}} = \Lambda^{-1}[w]_{\tilde{\mathcal{B}}} = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}[w]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} -\pi & -1 & 1+\pi \\ \pi-1 & 1 & -\pi \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\pi+1 \\ \pi^2 \\ \pi \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} \pi^2-\pi-\pi^2+\pi+\pi^2 \\ -\pi^2-2\pi-1-\pi^2-\pi^2 \\ \pi+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^2 \\ -1-2\pi-3\pi^2 \\ 1+\pi \end{pmatrix}.$

2. Sei

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

a.) Zeige, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^5$ ist und berechne die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach der Standardbasis $\mathcal{E}$.

b.) Sei $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Bestimme die Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung: a.) Die Menge $\mathcal{B}$ ist eine Basis, genau wenn die Matrix

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

invertierbar ist. Wenn das der Fall ist, ist die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$ die Inverse von $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$. Deshalb berechnen wir die Inverse direkt durch Gauss-Reduktion. Dadurch werden wir selbstverständlich erfahren, dass $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ invertierbar ist.

Es ist

$$
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0\\
0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 14 & -5 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 15 & -5 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & -11 & \frac{10}{3} & -\frac{5}{3}\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -5 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3}
\end{array}\right].
$$

Deshalb ist $\mathcal{B}$ eine Basis und die gewünschte Transformationsmatrix

$$
L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 3 & 0 & 0\\
1 & 1 & 6 & -2 & 1\\
-2 & -5 & -33 & 10 & -5\\
0 & -3 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & -15 & 5 & -1
\end{bmatrix}.
$$

b.) Es ist

$$
[v]_{\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}[v]_{\mathcal{E}} = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}v = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 3 & 0 & 0\\
1 & 1 & 6 & -2 & 1\\
-2 & -5 & -33 & 10 & -5\\
0 & -3 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & -15 & 5 & -1
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-9\\-9\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-9\\-20\\112\\-9\\47\end{bmatrix}.
$$

3. Sei $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ die Standardbasis des Vektorraumes $V := \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 3$. Sei weiter $\alpha : V \to V$ die Funktion $\alpha(p(x)) := (x-1)p'(x)$, wo $p'(x) := \frac{dp}{dx}(x)$, und $\tilde{\mathcal{B}} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}$.

a.) Zeige, dass α linear ist. Beweise, dass $\tilde{\mathcal{B}}$ eine Basis von V ist, die aus Eigenvektoren von α besteht.

b.) Sei $\beta : V \to \mathbb{R}$ die lineare Abbildung $f(x) \mapsto f(1)$. Bestimme die Matrixdarstellung von β bezüglich $\mathcal{B}$ und bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$.

c.) Schreib die Transformationsmatrix $L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$ und ihre Inverse $L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$.

Lösung: a.) Die Abbildung α ist wohl definiert, weil die Ableitung eines Polynoms p noch ein Polynom ist, dessen Grad gleich $\deg(p) - 1$ ist, so dass $\deg((x-1)p') = 1 + \deg(p') = \deg(p) \leqslant 3$. Da die Ableitung linear ist, gilt das folgende für jedes $p, q \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\alpha(p + \lambda q) &= (x-1)(p + \lambda q)' = (x-1)(p' + \lambda q') \\ &= (x-1)p' + \lambda(x-1)q' = \alpha(p) + \lambda\alpha(q).\end{aligned}$$

Deswegen ist α linear.

Ausserdem ist es für jedes $k \in \{1, 2, 3\}$

$$\alpha((x-1)^k) = (x-1) \cdot k(x-1)^{k-1} = k(x-1)^k,$$

d.h., $(x-1)^k$ ist ein Eigenvektor mit Eigenwert k. Dazu ist es $\alpha(1) = 0$, so dass das konstante Polynom 1 ein Eigenvektor mit Eigenwer 0 ist. Dann sind die vier Elemente von $\tilde{\mathcal{B}}$ linear unabhängig und deshalb bilden sie eine Basis des vierdimensionalen Vektorraum V.

b.) Die Matrixdarstellung von β ist bezüglich einer Basis von V und einer Basis von $\mathbb{R}$ definiert. Wir nehmen $\mathcal{E} = \{1\}$ als Basis von $\mathbb{R}$. Um die Matrixdarstellung zu bestimmen, muss man die Bilde der Basiselemente berechnen. Es ist

$$\beta(1) = 1,\ \beta(x^n) = 1,\ \beta((x-1)^n) = 0.$$

Daraus folgern wir

$$A_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = [1\ 1\ 1\ 1] \quad A_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{B}}} = [1\ 0\ 0\ 0].$$

c.) Es ist

$$1 = 1,\ x - 1 = -1 + x,\ (x-1)^2 = 1 - 2x + x^2,\ (x-1)^3 = -1 + 3x - 3x^2 + x^3.$$

Deshalb ist die Transformationsmatrix

$$L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Inverse lässt sich einfach als Transformationsmatrix $L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$ berechnen. Es ist

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
x &= 1 + (x-1)\\
x^2 &= (1 + x - 1)^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2\\
x^3 &= (1 + x - 1)^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3,
\end{aligned}$$

aus dem folgern wir

$$L^{-1}_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^3$ und die Basis

$$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Bestimme die Matrixdarstellung der Funktion $\psi(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{x}$ bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung: Im Folgenden bezeichnet $\cdot$ das Skalarprodukt zweier Vektoren, welches in $\mathbb{R}^3$ definiert ist durch die Rechenvorschrift

$$\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \in \mathbb{R} \text{ für alle } \begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sei $\overrightarrow{x} = a_1 \overrightarrow{v_1} + a_2 \overrightarrow{v_2} + a_3 (\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2})$ ein Vektor in $\mathbb{R}^3$. Dann hat

$$\begin{aligned}
\psi(\overrightarrow{x}) &= \overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{x}\\
&= \overrightarrow{v_2} \times (a_1 \overrightarrow{v_1} + a_2 \overrightarrow{v_2} + a_3 (\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}))\\
&= -a_1 (\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) - a_3 (\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}) \overrightarrow{v_2} + a_3 ||\overrightarrow{v_2}||^2 \overrightarrow{v_1}
\end{aligned}$$

bezüglich der Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ den Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} a_3 ||\overrightarrow{v_2}||^2\\ -a_3 (\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2})\\ -a_1 \end{pmatrix}$ und daher ist

$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ||\overrightarrow{v_2}||^2\\ 0 & 0 & -(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2})\\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, weil gilt

$$B \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ||\overrightarrow{v_2}||^2\\ 0 & 0 & -(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2})\\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 ||\overrightarrow{v_2}||^2\\ -a_3 (\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2})\\ -a_1 \end{pmatrix}.$$

Oben haben wir die folgenden drei Eigenschaften

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v} &= 0 \text{ für alle } \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3, \\
\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} &= -\left(\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_1}\right) \text{ für alle } \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^3, \\
\overrightarrow{v_2} \times \left(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\right) &= \left(\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2}\right) \overrightarrow{v_1} - \left(\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1}\right) \overrightarrow{v_2} \\
&= \left|\left|\overrightarrow{v_2}\right|\right|^2 \overrightarrow{v_1} - \left(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}\right) \overrightarrow{v_2} \text{ für alle } \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

des Kreuzproduktes verwendet. Die letzte dieser Identitäten folgt aus dem Grassmannschen Entwicklungssatz

$$\overrightarrow{v_1} \times \left(\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_3}\right) = \left(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_3}\right) \overrightarrow{v_2} - \left(\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}\right) \overrightarrow{v_3} \text{ für alle } \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \in \mathbb{R}^3.$$

Bemerkung: Wenn $\left|\left|\overrightarrow{v_2}\right|\right| = 1$ und $\overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_2} \iff \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$, ergibt sich die einfachere Lösung

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die obigen zwei Bedingungen an $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ müssen aber nicht erfüllt sein.

5. Gegeben sind die reellen Matrizen

$$\begin{aligned}
m_1 &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad m_3 := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_4 := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
A &:= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \text{ und } B =: \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 100 & 1000 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

   (a) Zeige, dass $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2-Matrizen ist.

   (b) Finde $[B]_{\mathcal{M}}$.

   (c) Finde $[A]_{\mathcal{M}}$ und folgere daraus, dass $\{m_1, A, m_3, m_4\}$ keine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2-Matrizen ist.

Lösung:

   (a) Wir benutzen die Standardbasis $\mathcal{E} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

   Dann hat es

$$[m_1]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [m_2]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [m_3]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [m_4]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und ist $\mathcal{M}$ eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ wenn und nur wenn die Matrix

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Ist das der Fall, dann ist $L = L_{\mathcal{M}\mathcal{E}}$ die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{M}$ und wird ihre Inverse später von Nutzen sein. Deshalb könnte man direkt durch Gauss-Reduktion versuchen, die Inverse von L zu finden, so wie bei Serie 1, Aufgabe 2. Diesmal werden wir aber A^{-1} mit Hilfe der Adjunkten berechnen. Dann reicht es für (a) zu bemerken, dass die Entwicklung nach der zweiten Zeile lautet

$$\det(L) = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2-2+2) = 1 \neq 0.$$

Wie oben erklärt, ist dann $\mathcal{M}$ eine Basis.

(b) Es hat

$$[B]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$L_{\mathcal{M}\mathcal{E}}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -7 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgern wir, dass

$$\begin{aligned}
[B]_{\mathcal{M}} = L_{\mathcal{M}\mathcal{E}}^{-1}[B]_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} -1 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1-70+200+2000 \\ -20+100 \\ 10 \\ 1+40-100-1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2129 \\ 80 \\ 10 \\ -1059 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) Es hat

$$[A]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$[A]_{\mathcal{M}} = L_{\mathcal{M}\mathcal{E}}^{-1}[A]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet, dass $A = 2m_1 + 3m_3 + m_4$ und dass die vier Matrizen m_1, A, m_3 und m_4 linear abhängig sind, so dass sie keine Basis bilden können.

6. Für jede folgende Untermenge vom Vektorraum $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$ der reellen Polynomen vom Grad $\leqslant 4$, bestimme ob sie ein Untervektorraum ist. Ist das der Fall, finde eine Basis dieses Untervektorraumes.

   (a) $U_1 := \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : f(1) = 1\}$
   (b) $U_2 := \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : f(1) = f(0) = f(-1) = 0\}$
   (c) $U_3 := \{f \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : f(0) + f'(0) = 2f(1)\}$

   Lösung:

   (a) U_1 ist kein Untervektorraum, da das Nullpolynom 0 die Gleichung $0(1) = 1$ nicht erfüllt, so dass es nicht in U_1 enthalten ist.
   (b) Sei $f \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$ und schreiben wir $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ mit $a_i \in \mathbb{R}$. Es hat $f \in U_2$ wenn und nur wenn $f(1) = f(0) = f(-1) = 0$. Das heisst,

$$\begin{aligned}
f \in U_2 &\iff a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0 \\
&\iff a_0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0 \\
&\iff a_0 = a_1 + a_3 = a_2 + a_4 = 0.
\end{aligned}$$

Also besteht U_2 aus allen Polynomen f, die sich als $f = u_1x + u_2x^2 - u_1x^3 - u_2x^4 = u_1(x - x^3) + u_2(x^2 - x^4)$ schreiben lassen, wo u_1, u_2 beliebige reelle Zahlen sind. Das bedeutet, dass U_2 ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$ mit Basis $\{x - x^3, x^2 - x^4\}$ ist.

(c) Sei wieder $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$. Wir wissen, dass man $f' = (\dots)x + a_1$ schreiben kann (im Klammer steht ein Polynom, das für uns nicht wichtig sein wird). Dann hat es $f'(0) = 0 + a_1 = a_1$. Ausserdem berechnen wir $f(0) = a_0$ und $2f(1) = 2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
U_3 &= \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : \\
&\qquad a_0 + a_1 = 2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5\} \\
&= \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : \\
&\qquad a_0 = -a_1 - 2a_2 - 2a_3 - 2a_4 - 2a_5\} \\
&= \{-a_1 - 2a_2 - 2a_3 - 2a_4 - 2a_5 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : a_i \in \mathbb{R}\} \\
&= \{a_1(x-1) + a_2(x^2-2) + a_3(x^3-2) + a_4(x^4-2) \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 4} : a_i \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Daraus folgern wir, dass U_3 ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 4}$ ist, der von der Menge $\{x-1, x^2-2, x^3-2, x^4-2\}$ erzeugt ist. Da diese vier Polynome linear unabhängig sind (warum?), ist $\{x - 1, x^2 - 2, x^3 - 2, x^4 - 2\}$ eine Basis von U_3.

Abgabetermin: 01.03.2021.